1. Baltian tie -kilpailu
Riika, 24.–25. marraskuuta 1990

1. Kokonaisluvut 1, 2, …, n kirjoitetaan ympyrään, ei välttämättä suuruusjärjestykseen. Mikä on vierekkäisten lukujen erotusten itseisarvojen summan pienin mahdollinen arvo?

2. Numeroidaan ruutupaperin neliöt seuraavan kaavion mukaisesti:

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & & & & & & \\
\cdots & & & & & & \\
4 & 10 & 14 & & & & \\
3 & 6 & 9 & 13 & & & \\
2 & 3 & 5 & 8 & 12 & & \\
1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ m
\end{array}$$

Etsi sellainen kahden muuttujan m ja n polynomi $p(m, n)$, että luku $p(m, n)$ on sama kuin ruutuun, jonka koordinaatit ovat (m, n), kirjoitettu luku.

3. Olkoon $a_0 > 0$, $c > 0$ ja

$$a_{n+1} = \frac{a_n + c}{1 - a_n c}, \quad n \geq 0.$$

Voivatko luvut $a_0, a_1, \ldots, a_{1989}$ olla positiivisia, mutta $a_{1990} < 0$?

4. Osoita, että kaikille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geq 0.$$

5. Olkoon $*$ operaatio, joka liittää jokaiseen reaalilukupariin reaaliluvun (esim. $a * b = a + b^2 - 17$). Keksi yhtälö, joka on tosi kaikille muuttujanarvoille siinä tapauksessa, että operaatio $*$ on vaihdannainen ja liitännäinen, mutta joka voi olla epätosi muulloin.

6. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, $AD = BC$, $\angle A + \angle B = 120°$ ja olkoon P sellainen piste nelikulmion ulkopuolelta, että kolmio DPC on tasasivuinen. Todista, että myös kolmio APB on tasasivuinen.

7. Kuperan viisikulmion $ABCDE$ sivun AB keskipiste yhdistetään janalla kolmion CDE keskijanojen leikkauspisteeseen, sivun BC keskipiste kolmion DEA keskijanojen leikkauspisteeseen jne. Osoita, että näin syntyvät viisi janaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

8. Tiedetään, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän mielivaltaisesta pisteestä P suorille AB, BC ja CA piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet ovat samalla suoralla, ns. Simsonin suoralla. Osoita, että ympyrän halkaisijan päätepisteisiin P_1 ja P_2 liittyvät Simsonin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

9. Ellipsin sisään on piirretty kaksi yhtenevää kolmiota. Ovatko ne välttämättä symmetrisiä joko ellipsin akselin tai sen keskipisteen suhteen?

10. Suoralla t on yksikköjana AB. Janaa siirretään tasossa niin, että se pysyy t:n suuntaisena, eivätkä A:n ja B:n piirtämät käyrät leikkaa toisiaan; jana palaa lopulta suoralle t. Kuinka kaukana A voi olla alkuasemastaan?

11. Todista, että kokonaislukukertoimisen polynomin kokonaislukunollakohta ei voi olla itseisarvoltaan suurempi kuin polynomin kertoimien suurin itseisarvo.

12. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Todista, että luku $25m + 3n$ on jaollinen 83:lla, jos ja vain jos $3m + 7n$ on jaollinen 83:lla.

13. Todista, että yhtälöllä $x^2 - 7y^2 = 1$ on äärettömän monta ratkaisua luonnollisten lukujen parien joukossa.

14. Onko olemassa 1990 keskenään yhteistekijätöntä lukua siten, että kaikki ainakin kahden tällaisen luvun summat ovat yhdistettyjä lukuja?

15. Todista, että yksikään luvuista

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ei ole kokonaisluvun kuutio.

16. Piirretään suljettu murtoviiva ruutupaperin viivoja käyttäen. Murtoviivan jokaisen sivun pituus on ruudun sivun pariton monikerta. Todista, että sivujen määrä on jaollinen neljällä.

17. Kahdessa kasassa on makeisia, toisessa 72 ja toisessa 30 kappaletta. Kaksi oppilasta ottaa vuorotellen makeisia jommasta kummasta kasasta. Otettujen makeisien määrän on oltava toisessa kasassa olevien makeisten määrän monikerta. Kumpi oppilas, pelin aloittaja vai toinen, voi aina olla varma, että hän pystyy ottamaan toisen kasan viimeisen makeisen?

18. Positiiviluvut $1, 2, \ldots, 100, 101$ kirjoitetaan 101×101-ruudukkoon niin, että jokainen luku toistetaan 101 kertaa. Todista, että ruudukossa on yksi pysty- tai vaakarivi, jossa on ainakin 11 eri lukua.

19. Valitaan joukon $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ osajoukkoja niin, että minkä tahansa kahden valitun osajoukon leikkaus on joko yksi luku tai koostuu useasta peräkkäisestä luvusta. Mikä on osajoukkojen suurin mahdollinen lukumäärä?

20. Keksi uusi kilpailutehtävä ja sen ratkaisu.