2. Baltian tie -kilpailu
Tartto, 13.–15. joulukuuta 1991

1. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: mille tahansa n:lle eri kokonaisluvulle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erotuksien $a_i - a_j$, $i < j$, tulo on jaollinen 1991:llä.

2. Todista, että yhtälöllä $102^{1991} + 103^{1991} = n^m$, $m \geq 2$, ei ole positiivista kokonaislukuratkaisua.

3. Myytävänä on 20 kissaa, joiden hinnat ovat välillä 12 \$ – 15 \$ sekä 20 säkkiä, joiden hinnat ovat 10 sentistä 1 \$:iin (kaikki hinnat ovat eri suuria ja yhden sentin monikertoja). Todista, että kaksi poikaa, Jussi ja Pekka, voivat kumpikin ostaa kissan säkissä samalla rahamäärällä.

4. Olkoon p kokonaislukukertoiminen polynomi, jolle pätee $p(-n) < p(n) < n$ jollekin kokonaisluvulle. Todista, että $p(-n) < -n$.

5. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

6. Olkoon $[x]$ suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$ ja $\{x\} = x - [x]$. Ratkaise yhtälö

$$[x] \cdot \{x\} = 1991x.$$

7. Olkoot A, B ja C teräväkulmaisen kolmion kulmat. Todista oikeaksi epäyhtälö

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C.$$

8. Olkoot a, b, c, d ja e eri suuria reaalilukuja. Todista että yhtälöllä

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) +\\ &(x-a)(x-b)(x-d)(x-e) + (x-a)(x-c)(x-d)(x-e) +\\ &(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = 0\end{aligned}$$

on neljä eri suurta reaalilukuratkaisua.

9. Määritä yhtälön $ae^x = x^3$ ratkaisujen x lukumäärä.

10. Laske $\sin 3°$:n arvo rationaalisten ja juurilausekkeiden avulla.

11. Kaikki positiiviset luvut 1:stä 1 000 000:aan jaetaan kahteen joukkoon sen mukaan, onko luvun numeroiden summa pariton vai parillinen. Kummassa joukossa on useampia alkioita?

12. Kuperan 1991-kulmion kärjet numeroidaan 1:stä 1991:een. Monikulmion kaikki sivut ja lävistäjät väritetään sinisiksi tai punaisiksi. Todista, että jos kärkien numerointia muutetaan mielivaltaisesti, on olemassa k ja l siten, että k:lla ja l:llä merkittyjen kärkien välinen jana on samanvärinen ennen ja jälkeen numeroinnin muuttamisen.

13. Tasasivuinen kolmio on jaettu 25:ksi yhteneväksi kolmioksi, jotka on numeroitu 1:stä 25:een. Todista, että kolmioiden joukossa on kaksi sellaista, joilla on yhteinen sivu ja joiden numeroiden erotus on suurempi kuin 3.

14. Linnassa on saleja ja n ovea. Jokainen ovi johtaa salista toiseen tai ulos. Joka salissa on ainakin kaksi ovea. Ritari astuu linnaan. Hän voi kulkea mistä tahansa ovesta paitsi siitä, jonka läpi hän on viimeksi kulkenut. Keksi metodi, jolla ritari voi päästä ulos käymättä useammassa kuin $2n$:ssä salissa (jokainen sali lasketaan niin monta kertaa kuin siinä käydään).

15. Šakkilaudan ruutuihin on kirjoitettu mielivaltaisia kokonaislukuja. Kuningas on laudalla. Se alkaa siirtyä, ja joka kerta käydessään jossain ruudussa se lisää ruudussa olevaa lukua 1:llä. Onko mahdollista, että šakkilaudalle voidaan näin saada

a) vain parillisia lukuja;
b) vain 3:lla jaollisia lukuja;
c) kainkin ruutuihin sama luku?

16. Ympyrät $O_1(r_1)$ ja $O_2(r_2)$ sivuavat toisiaan ulkopuolisesti, ja l on niiden yhteinen tangentti. Ympyrä $O_3(r_3)$ sivuaa molempia edellisiä ympyröitä ja suoraa l, ja $r_3 < \min(r_1, r_2)$. Todista, että

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

17. Oletetaan, että avaruuden koordinaattitasot ovat heijastavia. Valonsäde lankeaa yhdelle niistä. Selvitä, miten lopulta heijastuneen säteen suunta riippuu alkuperäisen säteen suunnasta.

18. Onko mahdollista sijoittaa kaksi kolmiopohjaista pyramidia, joiden tilavuus on $\frac{1}{2}$, toisiaan leikkaamatta palloon, jonka säde on 1?

19. Työnnetään kolmea toisiaan ulkopuolisesti sivuavaa ympyrää hiukan lähemmäksi niin, että syntyy kolme paria ympyröiden keskinäisiä leikkauspisteitä. Olkoot A_1, B_1 ja C_1 näin syntyneet ulommat leikkauspisteet ja A_2, B_2 ja C_2 vastaavat sisemmät leikkauspisteet. Todista, että

$$A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_1C_2 \cdot C_1B_2 \cdot B_1A_2.$$

20. Pisteet $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$ ovat funktion $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, kuvaajalla siten, että $2 \cdot OA = AB$ (O on origo). Olkoon C janan AB keskipiste. Osoita, että x-akselin ja säteen OC välinen kulma on kolmasosa x-akselin ja säteen OA välisestä kulmasta.