3. Baltian tie -kilpailu

Vilna, 5.–8.11.1992

1. Olkoot p ja q kaksi peräkkäistä paritonta alkulukua. Todista, että $p+q$ on ainakin kolmen (ei välttämättä eri suuren) ykköstä suuremman positiivisen kokonaisluvun tulo.

2. Merkitään $d(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun kaikkien positiivisten tekijöiden (mukaan lukien 1 ja n) lukumäärää. Todista, että $\dfrac{n}{d(n)}$ on kokonaisluku äärettömän monella n.

3. Etsi päättymätön aritmeettinen jono, jonka termit eivät ole samoja ja jonka yksikään termi ei ole kahden positiiviluvun neliöiden eikä kuutioiden summa.

4. Onko mahdollista piirtää kuusikulmio, jonka kärjet ovat tason kokonaislukukoordinaattisissa pisteissä, siten, että kuusikulmion sivujen neliöt ovat kuusi peräkkäistä kokonaislukua?

5. Oletetaan, että $a^2+b^2+(a+b)^2 = c^2+d^2+(c+d)^2$. Todista, että $a^4+b^4+(a+b)^4 = c^4+d^4+(c+d)^4$.

6. Todista, että 99:n luvun $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$, $k = 2, 3, \ldots, 100$, tulo on suurempi kuin $\dfrac{2}{3}$.

7. Olkoon $a = \sqrt[1992]{1992}$. Kumpi luvuista

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}} \quad \text{vai} \quad 1992,$$

missä "potenssitornissa" on 1992 a:ta, on suurempi?

8. Määritä kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$2^x(4-x) = 2x+4.$$

9. Polynomin $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ kertoimille on voimassa $b<0$ ja $ab = 9c$. Todista, että polynomilla on kolme erisuurta reaalijuurta.

10. Määritä kaikki neljännen asteen polynomit $p(x)$, joille seuraavat neljä ehtoa toteutuvat:

(i) $p(x) = p(-x)$ kaikilla x,
(ii) $p(x) \geq 0$ kaikilla x,
(iii) $p(0) = 1$,
(iv) $p(x)$:llä on tasan kaksi ehdon $|x_1 - x_2| = 2$ toteuttavaa lokaalia minimipistettä x_1 ja x_2.

11. Olkoon $\mathbb{Q}^+$ positiivisten rationaalilukujen joukko. Osoita, että on olemassa yksi ja vain yksi funktio $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) jos $0 < q < \dfrac{1}{2}$, niin $f(q) = 1 + f\left(\dfrac{q}{1-2q}\right)$,
(ii) jos $1 < q \leq 2$, niin $f(q) = 1 + f(q-1)$,
(iii) $f(q) \cdot f\left(\dfrac{1}{q}\right) = 1$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}^+$.

12. Olkoon $\mathbb{N}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Olkoon $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektio (jokainen $a \in \mathbb{N}$ on $\phi(n)$ jollain $n \in \mathbb{N}$ ja jos $n \neq m$, niin $f(n) \neq f(m)$). Oletetaan, että on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = L.$$

Mitkä ovat L:n mahdolliset arvot?

13. Osoita, että kaikille positiivisille luvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

14. Eräässä maassa on äärellinen määrä kaupunkeja. Tiet kaupunkien välillä ovat yksisuuntaisia. Jos tarkastellaan mitä hyvänsä kahta kaupunkia, niin toiseen niistä pääsee teitä pitkin toisesta. Todista, että maassa on kaupunki, josta voi päästä teitä pitkin kaikkiin muihin kaupunkeihin.

15. Noakin olisi sijoitettava 8 erilajista eläintä neljään arkin häkkiin, kaksi kuhunkin. Osoittautuu, että jokaisella näistä eläimistä on toisten eläinten joukossa enintään kolme sellaista, joiden kanssa ne eivät voi mennä samaan häkkiin. Osoita, että vaaditunlainen jako on tehtävissä.

16. Kuperan monitahokkaan kaikki sivutahkot ovat suunnikkaita. Voiko monitahokkaalla olla tasan 1992 sivutahkoa?

17. Nelikulmio $ABCD$ on piirretty 1-säteisen ympyrän sisään niin, että lävistäjä AC on ympyrän halkaisija ja lävistäjä BD on yhtä pitkä kuin AB. Lävistäjien leikkauspiste on P. Tiedetään, että PC:n pituus on $\frac{2}{5}$. Kuinka pitkä on sivu CD?

18. Osoita, että kolmiossa, joka ei ole tylppäkulmainen, kolmion piiri on aina suurempi kuin kaksi kertaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija.

19. Ympyrät C_1 ja C_2 sivuavat sisäpuolisesti ympyrää C pisteissä A ja B. Olkoon t ympyröiden C_1 ja C_2 sellainen yhteinen tangentti, jonka samalla puolella molemmat ympyrät ovat; sen ja ympyröiden sivuamispisteet ovat D ja E. Suorien AD ja BE leikkauspiste on F. Osoita, että F on ympyrällä C.

20. Olkoot $a \leq b \leq c$ suorakulmaisen kolmion sivut, $2p$ sen piiri ja S sen ala. Osoita, että

$$p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$$

.