6. Baltian tie -kilpailu
Västerås, 12. marraskuuta 1995

1. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (x, y, z), jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^2 = 2(y+z) \\ x^6 = y^6 + z^6 + 31(y^2+z^2). \end{cases}$$

2. Olkoot a ja k positiivisia kokonaislukuja ja olkoon a^2+k luvun $(a-1)a(a+1)$ tekijä. Osoita, että $k \geq a$.

3. Positiiviset kokonaisluvut a, b ja c ovat pareittain yhteistekijättömiä, a ja c ovat parittomia ja luvut toteuttavat yhtälön $a^2+b^2=c^2$. Osoita, että $b+c$ on kokonaisluvun neliö.

4. John on vanhempi kuin Mary. John huomaa, että kun hän vaihtaa ikänsä molemmat numerot keskenään, hän saa tulokseksi Maryn iän. Lisäksi ikien neliöiden erotus on kokonaisluvun neliö. Miten vanhoja John ja Mary ovat?

5. Olkoot $a<b<c$ kolme positiivista kokonaislukua. Todista, että minkä hyvänsä $2c$:n peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun joukossa on kolme eri lukua x, y ja z siten, että abc on xyz:n tekijä.

6. Todista, että positiivisille luvuille a, b, c ja d pätee

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

7. Todista, että $\sin^3 18° + \sin^2 18° = \dfrac{1}{8}$.

8. Reaaliluvut a, b ja c toteuttavat epäyhtälöt $|a| \geq |b+c|$, $|b| \geq |c+a|$ ja $|c| \geq |a+b|$. Todista, että $a+b+c=0$.

9. Todista, että

$$\frac{1995}{2} - \frac{1994}{3} + \frac{1993}{4} - \ldots - \frac{2}{1995} + \frac{1}{1996} = \frac{1}{999} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{1995}{1996}.$$

10. Määritä kaikki nollasta eroavien reaalilukujen joukossa määritellyt reaaliarvoiset funktiot f, joille pätee

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f\left(\dfrac{1}{x+y}\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ kaikilla nollasta eroavilla luvuilla x, y ja $x+y$,

(c) $(x+y)f(x+y) = xy\,f(x)f(y)$ kaikilla nollasta eroavilla luvuilla x, y ja $x+y$.

11. Kuinka monella tavalla joukko $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ voidaan jakaa kolmeksi epätyhjäksi osajoukoksi, joista mikään ei sisällä kahta peräkkäistä kokonaislukua?

12. Olkoon 19 palloa sijoitettuna 95 laatikkoon umpimähkäisesti. Sijoitetaan kuusi uutta palloa laatikkoihin, kukin eri laatikkoon. Voidaanko tätä operaatiota tarpeeksi monta kertaa toistamalla päästä tilanteeseen, jossa jokaisessa laatikossa on yhtä monta palloa?

13. Tarkastellaan seuraavaa kahden pelaajan peliä. Pöydällä on joukko pikkukiviä. Pelaajat tekevät siirtonsa vuorotellen. Siirto tarkoittaa, että pöydältä otetaan x kiveä, missä x on minkä hyvänsä positiivisen kokonaisluvun neliö. Pelaaja, joka ei voi tehdä siirtoa, häviää pelin. Osoita, että on olemassa äärettömän monta alkutilannetta, joista lähtien toisena siirtävä pelaaja voi voittaa riippumatta siitä, miten hänen vastustajansa pelaa.

14. äärettömällä kolmioidulla paperiarkilla on n kirppua. Kirput ovat aluksi eri pikkukolmioissa, jotka kaikki sisältyvät n^2:sta pikkukolmiosta koostuvaan tasasivuiseen kolmioon. Jokainen kirppu hyppää kerran sekunnissa kolmiostaan yhteen kolmesta naapuripikkukolmiosta kuvan osoittamalla tavalla. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa alkutilanne, josta kaikki kirput voivat äärellisen hyppymäärän jälkeen päästä yhteen ja samaan pikkukolmioon?

15. Olkoon annettu $(2n+1)$-kulmio. Osoita, että tämän monikulmion kärjet ja sivujen keskipisteet voidaan numeroida käyttäen kaikkia lukuja $1, 2, \ldots, 4n+2$ niin, että kuhunkin monikulmion sivuun liittyvien kolmen luvun summa on sama.

16. Olkoon l kolmion ABC kulman C vieruskulman puolittaja. Janan AB keskipisteen O kautta piirretty l:n suuntainen suora leikkaa suoran AC pisteessä E. Määritä $|CE|$, kun $|AC| = 7$ ja $|CB| = 4$.

17. Osoita, että on olemassa sellainen luku α, että mielivaltaiselle kolmiolle ABC pätee

$$\max\{h_A,\, h_B,\, h_C\} \le \alpha \cdot \min\{m_A,\, m_B,\, m_C\},$$

missä h_A, h_B ja h_C ovat kolmion ABC korkeusjanojen pituudet ja m_A, m_B ja m_C sen keskijanojen pituudet. Määritä α:n pienin mahdollinen arvo.

18. Olkoon M kolmion ABC sivun AC keskipiste ja olkoon H kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoot P ja Q pisteiden A ja C kohtisuorat projektiot kulman B puolittajalla. Osoita, että pisteet H, P, M ja Q ovat samalla ympyrällä.

19. Seuraavaa konstruktiota käytetään avaruuslentäjien koulutuksessa: $2R$-säteinen ympyrä C_2 pyörii pitkin toisen nR-säteisen (n on kokonaisluku ja suurempi kuin 2) kiinteän ympyrän C_1 sisäpuolta. Avaruuslentäjä on kiinnitettynä kolmanteen R-säteiseen ympyrään C_3, joka pyörii ympyrän C_2 sisäpuolella niin, että ympyröiden C_2 ja C_3 sivuamispiste on aina maksimietäisyydellä ympyröiden C_1 ja C_2 sivuamispisteestä. Kuinka monta kierrosta (kiinteän maan suhteen) avaruuslentäjä tekee yhdessä ympyrän C_3 kanssa, kun ympyrä C_2 tekee yhden täyden kierroksen ympyrän C_1 ympäri?

20. Osoita, että jos kuperan viisikulmion kaikkien kärkipisteiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja, niin viisikulmion ala on vähintään $\dfrac{5}{2}$.