Baltian tie 1997

Kööpenhamina, 9. 11. 1997, klo 10.00.

Aika: $4\frac{1}{2}$ tuntia. Jokaisesta tehtävästä voi saada 5 pistettä.

1. Määritä kaikki reaaliarvoiset reaalilukufunktiot f, jotka eivät ole nollafunktioita ja joille

$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

2. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jono positiivisia kokonaislukuja, jossa jokainen positiivinen kokonaisluku esiintyy täsmälleen kerran. Osoita, että on olemassa kokonaisluvut ℓ ja m, $1 < \ell < m$, joille $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Olkoon $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$, missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta x:ää pienempää kokonaislukua. Määritä x_{1997}.

4. Todista, että lukujen $x_1, \ldots, x_n$ aritmeettiselle keskiarvolle a pätee

$$(x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \leq \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2 .$$

5. Positiivisten kokonaislukujen jonossa $u_0, u_1, \ldots$ luku u_0 on mielivaltainen ja jokaisella ei-negatiivisella kokonaisluvulla n pätee

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{kun } u_n \text{ on parillinen,} \\ a + u_n & \text{kun } u_n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

missä a on pariton kiinteä positiivinen kokonaisluku. Todista, että jono on jostain jäsenestään alkaen jaksollinen.

6. Etsi kaikki ei-negatiivisten lukujen kolmikot (a, b, c), joille pätee $a \geq b \geq c$ ja

$$1 \cdot a^3 \; + \; 9 \cdot b^2 \; + \; 9 \cdot c \; + \; 7 \; = \; 1997.$$

7. Olkoot P ja Q kokonaislukukertoimisia polynomeja. Oletetaan, että kokonaisluvut a ja $a + 1997$ ovat polynomin P juuria ja $Q(1998) = 2000$. Osoita, että yhtälöllä $Q(P(x)) = 1$ ei ole kokonaislukuratkaisuja.

8. Kun lukuun 1996 lisätään 1997, ensin numerot 6 ja 7 lasketaan yhteen. Kun tulokseksi saadaan 13, numero 3 kirjoitetaan yhteenlaskurivin alle ja numero 1 kirjoitetaan seuraavaan sarakkeeseen muistiluvuksi. Näin jatkaen huomataan, että kaikkiaan tarvitaan kolme muistilukua:

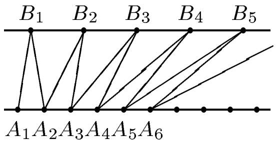
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1\,9\,9\,6 \\ +\;1\,9\,9\,7 \\ \hline 3\,9\,9\,3 \end{array}$$

Onko olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k, että lukujen $1996 \cdot k$ ja $1997 \cdot k$ yhteenlaskussa ei tarvita muistilukuja?

9. Maailmanpallon maailmat on numeroitu 1, 2, 3, ... ja jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $n \geq 1$, taikuri Gandalf voi siirtyä mihin tahansa suuntaan maailmojen n, $2n$ ja $3n+1$ välillä. Voiko Gandalf siirtyä mistä tahansa maailmasta mihin tahansa maailmaan?

10. Osoita, että mistä tahansa 79 peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun jonosta löytyy luku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on jaollinen luvulla 13.

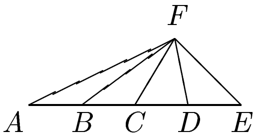
11. Kahdella yhdensuuntaisella suoralla on annettuna pisteet A_1, A_2, A_3, ... ja B_1, B_2, B_3, ... (kuten kuvassa), joille pätee $|A_iA_{i+1}| = 1$ ja $|B_iB_{i+1}| = 2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Olkoon $\measuredangle A_1A_2B_1 = \alpha$. Laske



$$\measuredangle A_1B_1A_2 + \measuredangle A_2B_2A_3 + \measuredangle A_3B_3A_4 + \cdots.$$

12. Kaksi ympyrää $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ leikkaavat pisteissä P ja Q. Pisteen P kautta kulkeva jana leikkaa ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteessä A ja ympyrän $\mathcal{C}_2$ pisteessä B. Olkoon X janan AB keskipiste. Suora QX leikkaa ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteessä Y ja ympyrän $\mathcal{C}_2$ pisteessä Z. Osoita, että X on janan YZ keskipiste.

13. Samalla suoralla oleville pisteille A, B, C, D ja E pätee $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Piste F ei ole tällä suoralla. Olkoon G kolmion ADF ympäripiirretyn ympyrän keskipiste ja H kolmion BEF ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että suorat GH ja FC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



14. Kolmiossa ABC pätee, että $|AC|^2$ on $|BC|^2$:n ja $|AB|^2$:n aritmeettinen keskiarvo. Osoita, että $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$. (Huom! $\cot v = \cos v / \sin v$.)

15. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC kulmien $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ puolittajat leikkaavat kolmion ympäripiirretyn ympyrän pisteissä A_1, B_1 ja C_1, tässä järjestyksessä. Piste M on suorien AB ja B_1C_1 leikkauspiste, ja N on suorien BC ja A_1B_1 leikkauspiste. Osoita, että MN kulkee kolmion $\triangle ABC$ sisäänpiirretyn ympyrän kautta.

16. Kaksi pelaajaa pelaa 5×5-shakkilaudalla seuraavaa peliä: Ensimmäinen pelaaja asettaa ratsun jollekin ruudulle. Tämän jälkeen pelaajat siirtävät ratsua shakin sääntöjen mukaisesti (jälkimmäinen pelaaja aloittaa siirtelyn). Ratsua ei saa siirtää ruutuun, jossa se jo oli. Pelaaja, joka ei voi enää siirtää, häviää pelin. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

17. Suorakaiteen voi jakaa n samankokoiseen neliöön. Saman suorakaiteen voi myös jakaa $n + 76$ pienempään samankokoiseen neliöön. Määritä n.

18. (i) Osoita, että on olemassa kaksi, toisiaan mahdollisesti leikkaavaa, ääretöntä joukkoa A ja B, joille pätee, että jokainen epänegatiivinen kokonaisluku

n voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla muodossa $n = a + b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$.

(ii) Osoita, että jokaisesta sellaisesta parista (A, B) joko joukko A tai joukko B sisältää ainoastaan jonkin kokonaisluvun $k > 1$ monikertoja.

19. Metsän n eläintä $(n \geq 3)$ elää kukin omassa luolassaan, ja kustakin luolasta on polku kuhunkin toiseen. Ennen metsän kuninkaan vaalia jotkin eläimet kampanjoivat ehdokkuutensa puolesta. Jokainen kampanjoiva eläin vierailee kunkin toisen eläimen luona täsmälleen kerran, käyttää aina polkua siirtyessään luolasta toiseen, ei koskaan poikkea polulta toiselle siirtyessään luolasta toiseen ja palaa kampanjansa lopuksi omaan luolaansa. Tiedetään myös, että kutakin polkua käyttää vain yksi kampanjoiva eläin.

a) Osoita, että jokaisella alkuluvulla n suurin mahdollinen kampanjoivien eläinten määrä on $\frac{n-1}{2}$;

b) Etsi suurin mahdollinen kampanjoivien eläinten lukumäärä, kun $n = 9$.

20. Rivissä on kaksitoista korttia, joita on kolmenlaisia: joko molemmat puolet ovat valkoisia, molemmat ovat mustia tai toinen on valkoinen ja toinen on musta. Aluksi yhdeksän korteista on musta puoli ylöspäin. Sitten kortit 1–6 käännetään, jonka jälkeen neljästä kortista on musta puoli ylöspäin. Sitten kortit 4–9 käännetään ja kuudesta kortista on musta puoli ylöspäin. Lopuksi kortit 1–3 ja 10–12 käännetään, minkä jälkeen viidestä kortista on musta puoli ylöspäin. Kuinka monta kunkin lajin korttia on pöydällä?