Baltian tie 1999

Reykjavík, 6. marraskuuta, 1999

Tehtävä 1
Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a &= 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b &= 9 \end{aligned}$$

reaaliset ratkaisut.

Tehtävä 2
Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on seuraava ominaisuus: luvun n kuutiojuuri saadaan poistamalla n:n kymmenjärjestelmäesityksestä kolme viimeistä numeroa.

Tehtävä 3
Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$ niin, että epäyhtälö

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq 0$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joille pätee $a_1 + \cdots + a_n = 0$.

Tehtävä 4
Olkoon kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y

$$f(x, y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Osoita, että on olemassa sellaiset x_0 ja y_0, että $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ kaikilla positiivisilla x ja y. Laske $f(x_0, y_0)$.

Tehtävä 5
Piste (a, b) on ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Tähän pisteeseen piirretty ympyrän tangentti kohtaa paraabelin $y = x^2 + 1$ tasan yhdessä pisteessä. Etsi kaikki mahdolliset pisteet (a, b).

Tehtävä 6
Mikä on pienin määrä siirtoja, joilla ratsu pääsee yhdestä $n \times n$-shakkilaudan kulmasta vastakkaiseen kulmaan, kun $n \geq 4$?

Tehtävä 7
Kahta 8×8-shakkilaudan ruutua sanotaan naapureiksi, jos niillä on yhteinen sivu tai kulma. Voiko kuningas käydä jostain ruudusta lähtien kaikissa ruuduissa tasan kerran siten, että ensimmäistä siirtoa lukuunottamatta kuningas siirtyy aina ruutuun, jolle pätee: ruudulla on parillinen määrä sellaisia naapureita, joissa kuningas on jo ollut?

Tehtävä 8
On annettu 1 999 kolikkoa, joista mitkään kaksi eivät ole samanpainoisia. Käytettävissä on kone, joka kertoo yhdellä operaatiolla, mikä kolmesta kolikosta on painoltaan keskimmäinen. Osoita, että painojärjestyksessä tuhannes kolikko voidaan löytää enintään 1 000 000 operaatiolla, mutta minkään muun kolikon sijalukua painojärjestyksessä ei voida selvittää tällä koneella.

Tehtävä 9
Kuutio, jonka särmä on 3, jaetaan 27 yksikkökuutioon. Luvut $1, 2, \ldots, 27$ sijoitetaan mielivaltaisesti yksikkökuutioihin, yksi kuhunkin kuutioon. Muodostetaan kaikki 27 rivisummaa (kolmen luvun summia on yhdeksän kolmessa suunnassa). Kuinka moni näistä 27 summasta voi enintään olla pariton?

Tehtävä 10
Voiko yksikkösäteisen kiekon (kehä mukaanlukien) pisteet jakaa kolmeen osajoukkoon siten, ettei missään osajoukoista ole kahta pistettä, joiden keskinäinen etäisyys on yksi?

Tehtävä 11
Olkoon tasossa neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, että pisteistä kolme on ympyrän kehällä ja neljäs joko ympyrän kehällä tai sen sisäpuolella.

Tehtävä 12
Kolmiolle ABC pätee $2AB = AC + BC$. Osoita, että kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, ympäripiirretyn ympyrän keskipiste ja sivujen AC ja BC keskipisteet ovat samalla ympyrällä.

Tehtävä 13
Kolmion ABC kulmien A ja B puolittajat kohtaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E, tässä järjestyksessä. Lisäksi $AE + BD = AB$. Määritä kulma C.

Tehtävä 14
Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $AB = AC$. Pisteet D ja E ovat sivuilla AB ja AC, tässä järjestyksessä. Pisteen B kautta kulkeva ja sivun AC suuntainen suora leikkaa suoran DE pisteessä F. Pisteen C kautta kulkeva ja sivun AB suuntainen suora leikkaa suoran DE pisteessä G. Osoita, että

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

missä $[PQRS]$ on nelikulmion $PQRS$ pinta-ala.

Tehtävä 15
Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle C = 60^\circ$ ja $AC < BC$. Piste D on sivulla BC ja sille pätee $BD = AC$. Jatketaan sivua AC pisteeseen E, jolle $AC = CE$. Osoita, että $AB = DE$.

Tehtävä 16
Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, joka voidaan esittää muodossa $k = 19^n - 5^m$. Tässä n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja.

Tehtävä 17
Onko olemassa sellaista äärellistä kokonaislukujonoa $c_1, \ldots, c_n$, että luvut $a + c_1, \ldots, a + c_n$ ovat alkulukuja useammalla kuin yhdellä mutta ei äärettömän monella kokonaisluvulla a?

Tehtävä 18
Olkoon m sellainen positiivinen kokonaisluku, että $m \equiv 2 \pmod 4$. Osoita, että m voidaan kirjoittaa enintään yhdellä tavalla muodossa $m = ab$, missä a ja b ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}$.

Tehtävä 19
Osoita, että on olemassa äärettömän monta parillista positiivista kokonaislukua k, joille $p^2 + k$ on yhdistetty luku kaikilla alkuluvuilla p.

Tehtävä 20
Olkoot a, b, c ja d sellaisia alkulukuja, että $a > 3b > 6c > 12d$ ja $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Määritä lausekkeen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mahdolliset arvot.