Baltian tie 1999 – ratkaisut

Tehtävä 1

Sijoittamalla tehtävän yhtälöihin $A = a + 1$, $B = b + 1$, $C = c + 1$ ja $D = d + 1$ saadaan

$$\begin{aligned} ABC &= 2 & (1)\\ BCD &= 10 & (2)\\ CDA &= 10 & (3)\\ DAB &= 10. & (4) \end{aligned}$$

Kertomalla keskenään (1), (2) ja (3) saadaan $C^3(DAB)^2 = 200$, josta yhtälön (4) mukaan seuraa $C^3 = 2$. Vastaavasti $A^3 = B^3 = 2$ ja $D^3 = 250$. Alkuperäisen yhtälöryhmän ainoa ratkaisu on $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1$, $d = 5\sqrt[3]{2} - 1$.

Tehtävä 2

Yksi ratkaisu on $32^3 = 32\,768$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.
Jos n^3 on ratkaisu, tehtävän ehtojen mukaan pätee $1000n \le n^3 < 1000(n + 1)$. Vasemmanpuoleisesta epäyhtälöstä $n^2 \ge 1000$, eli $n \ge 32$. Oikeanpuoleisesta epäyhtälöstä $n^2 < 1000\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \le 1000\left(1 + \dfrac{1}{32}\right) < 1032$, eli $n \le 32$.

Tehtävä 3

Kun $n = 3$ voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} 0 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)&\\ \ge 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1).& \end{aligned}$$

Kun $n = 4$ voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) \le&\\ \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = 0.& \end{aligned}$$

Jos $n \ge 5$, valitsemalla $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-2} = 0$, $a_{n-1} = 2$ ja $a_n = 1$ saadaan

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 3.$$

Ratkaisu on siis $n = 3$ tai $n = 4$.

Tehtävä 4

Funktion määritelmästä

$$f(x, y) \le x \tag{5}$$

ja aritmeettis-geometrisestä epäyhtälöstä

$$f(x, y) \le \frac{y}{x^2 + y^2} \le \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x}. \tag{6}$$

Kertomalla epäyhtälöt (5) ja (6) keskenään saadaan $f(x, y)^2 \le 1/2$ eli $f(x, y) \le 1/\sqrt{2}$. Toisaalta $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktiolla f on siis maksimiarvo $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tehtävä 5

Mahdollisia pisteitä on viisi: $(0,1)$, $(\pm\sqrt{24}/5, -1/5)$ ja $(\pm 1, 0)$.
Tarkastellaan y-akselia leikkaavia suoria $y = kx + l$. Suora on ympyrän tangentti jos toisen asteen yhtälöllä $x^2 + (kx + l)^2 = 1$ on vain yksi ratkaisu, eli jos diskriminantti on nolla, eli $k^2 - l^2 + 1 = 0$. Suora kohtaa paraabelin vain yhdessä pisteessä, jos toisen asteen yhtälöllä $(kx + l) = x^2 + 1$ on vain yksi ratkaisu, eli jos diskriminantti on nolla, eli $k^2 + 4l - 4 = 0$. Näistä kahdesta ehdosta saadaan kolme ratkaisua $k = 0$ ja $l = 1$, $k = \sqrt{24}$ ja $l = -5$ sekä $k = -\sqrt{24}$ ja $l = -5$. Ratkaisut vastaavat pisteitä $(0,1)$ ja $(\pm\sqrt{24}/5, -1/5)$.
Tarkastellaan y-akselin suuntaisia suoria. Suora $x = 1$ toteuttaa tehtävän ehdot, samoin $x = -1$. Näistä suorista pisteet $(\pm 1, 0)$.

Tehtävä 6

Merkitään shakkilaudan ruutuja koordinaateilla (x, y), jossa $x, y = 1, 2, \ldots, n$. Matkalla ruudusta $(1,1)$ ruutuun (n,n) koordinaattien muutosten summa on $2(n-1)$. Yhdellä siirrolla koordinaattien yhteinen lisäys on korkeintaan 3. Koordinaattien summan parillisuus muuttuu joka siirrolla. Lisäksi $1 + 1$ ja $n + n$ ovat parillisia. Näistä päätellään, että tarvittavien siirtojen lukumäärä on parillinen ja suurempi kuin $\frac{2(n-1)}{3}$.
Jos $n = 4$ ratsu pääsee vastakkaiseen kulmaan kahdella siirrolla. Helposti löytyy myös siirrot tapauksille $n = 5$ (neljällä siirrolla) ja $n = 6$ (neljällä siirrolla). Ruudusta (i, i) ratsu pääsee ruutuun $(i + 4, i + 4)$ kahdella siirrolla. Näillä siirroilla ratsu pääsee kulmasta kulmaan siirtomäärällä, joka on parillinen ja suurempi kuin $\frac{2(n-1)}{3}$. Tämä on pienin mahdollinen siirtojen määrä.

Tehtävä 7

Ei voi. Olkoon S kaikkien sellaisten ruutuparien joukko, jotka ovat toistensa naapureita. Kutsutaan joukon S ruutuparia vanhaksi, jos molemmissa parin ruuduissa on jo käyty. Ensimmäisen siirron jälkeen on yksi vanha pari. *Jokainen seuraava siirto luo parillisen määrän vanhoja pareja.* Eli vanhojen parien lukumäärä on jokaisen siirron jälkeen pariton. Kuitenkin joukossa S on parillinen määrä pareja, eli kuningas ei voi käydä kaikissa ruuduissa.
Miksi joukossa S on parillinen määrä ruutupareja? Kierretään shakkilautaa 180 astetta keskipisteensä ympäri. Nyt lähes jokainen joukon S alkio kuvautuu jollekin toiselle joukon S alkiolle. Paitsi kaksi ruutuparia keskellä; ne, joiden ainut yhteinen piste on laudan keskipiste. Jokaiselle joukon S alkiolle löytyy siis pari, eli alkioita on parillinen määrä.

Tehtävä 8

Valitaan jotkin kolme kolikkoa ensimmäiseen punnitukseen ja vaihdetaan painoltaan keskimmäinen pois. Toistetaan tämä kaikille punnitus 1996 kertaa. Kun viimeisen operaation jälkeen painoltaan keskimmäinen on otettu pois, koneeseen jää painavin ja kevein kolikoista. Siirretään nämä syrjään. Toistetaan sama operaatio jäljellä oleville 1997 kolikolle ja siirretään näistä painavin ja kevein syrjään. Jatketaan tätä kunnes vain yksi kolikko on jäljellä. Se on painoltaan tuhannes. Yhteensä punnituksien määrä

$$1997 + 1995 + \ldots + 1 = 999^2 < 1\,000\,000.$$

Tehdään vastaoletus, että painoltaan r:s $r \neq 1000$ voidaan löytää koneen avulla. Nimetään kolikot jossain järjestyksessä $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Kolikkoa r etsitään tekemällä sarja punnituksia $(a_{i_1}, a_{j_1}, a_{k_1})$, $(a_{i_2}, a_{j_2}, a_{k_2})$ ..., joista tuloksena tiedetään keskimmäiset kolikot a_{m_1}, a_{m_2}, ... Tulosten perusteella voidaan nyt löytää, että a_s on painojärjestyksessa r:s.
Nyt joku (joka tietää kolikoiden painojärjestyksen) vaihtaakin kolikkoihin merkityt nimet niin, että painavimmam ja keveimmän nimet vaihdetaan keskenään, toiseksi painavimman ja toiseksi keveimmän nimet vaihdetaan keskenään jne. kaikille nimille, paitsi painojärjestyksessä tuhannennelle kolikolle. Kun toistetaan punnitukset $(a_{i_1}, a_{j_1}, a_{k_1})$, $(a_{i_2}, a_{j_2}, a_{k_2})$ ... (samat nimet, eri kolikot), saadaan (samat) tulokset a_{m_1}, a_{m_2}, ... Tämä siksi, että kolikoista painoltaan keskimmäinen ei riipu siitä, tarkastellaanko painoja kasvavassa vai pienenevässä järjestyksessä. Lopputulos on myös muuttumaton: painoltaan r:s on kolikko a_s. Tämä on ristiriita, sillä edellisessä punnituksessa valittiin kolikko a_{2000-s}.

Tehtävä 9

Kirjoitetaan 27 rivisummaa

$$\begin{aligned} 1+2+4 &= 7 \\ 3+5+7 &= 15 \\ &\vdots\ . \end{aligned}$$

Jos oikealla puolella on pelkästään parittomia lukuja, täytyy vasemmalla puolella olla parillisia lukuja jokaisella rivillä nolla tai kaksi kappaletta; yhteensä vasemmalla puolella parillinen määrä parillisia lukuja. Tämä ei ole mahdollista, koska parillisia lukuja on vasemmalla puolella yhteensä $3 \cdot 13 = 39$ kappaletta. (Jokainen luvuista $1, 2, \ldots, 27$ käytetään vasemmalla puolella tasan kolme kertaa ja parillisia lukuja on kolmetoista erilaista.) Oikealla puolella on siis ainakin yksi parillinen luku.
Tarkastellaan sellaista 3×3-tasoa, jossa jokin rivisumma on parillinen. Valitaan, että ylimmän rivin rivisumma on parillinen. Oletetaan, että kaikki muut rivisummat ovat parittomia. Siis toisen ja kolmannen rivin rivisummat ovat parittomia ja kaikkien kolmen sarakkeiden rivisummat ovat parittomia. Tästä seuraa ristiriita, sillä sarakkeista laskettuna koko tason numeroiden summa on pariton ja riveistä laskettuna parillinen. Parillisia rivisummia on siis ainakin kaksi.
Oletetaan, että oikealla puolella on vain kaksi parillista lukua. Parittomia lukuja on 25, eli yhtälöiden oikeiden puolien summa on pariton. Vasemalla puolella on kolme kertaa summa $1+2+\ldots 27$, joka on parillinen. Tämä on ristiriita. Parillisia rivisummia on ainakin kolme.
Parittomia rivisummia saadaan korkeintaan 24. Osoitetaan esimerkin avulla, että tämä yläraja saavutetaan. Ensimmäiseen tasoon laitetaan luvut

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

(vain jakojäännös on merkitty), toiseen tasoon

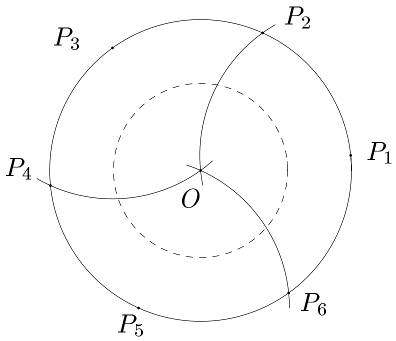
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

ja kolmanteen tasoon

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Tehtävä 10

Olkoon piste O kiekon keskipiste ja pisteet $P_1, \ldots, P_6$ säännöllisen kuusikulmion kärjet kiekon kehällä. Ajatellaan tehtävän osajoukkoihin jakoa punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi värittämisenä. Oletetaan, että O on punainen ja P_1, P_3 ja P_5 sinisiä ja P_2, P_4 ja P_6 vihreitä. Tarkastellaan P_1-keskistä ympyränkaarta pisteiden O ja P_2 kautta. Koska P_1 on sininen, ovat kaaren pisteet joko punaisia tai vihreitä. Vastaavasti P_3- ja P_5-keskisille ympyränkaarille. Kuvassa on O-



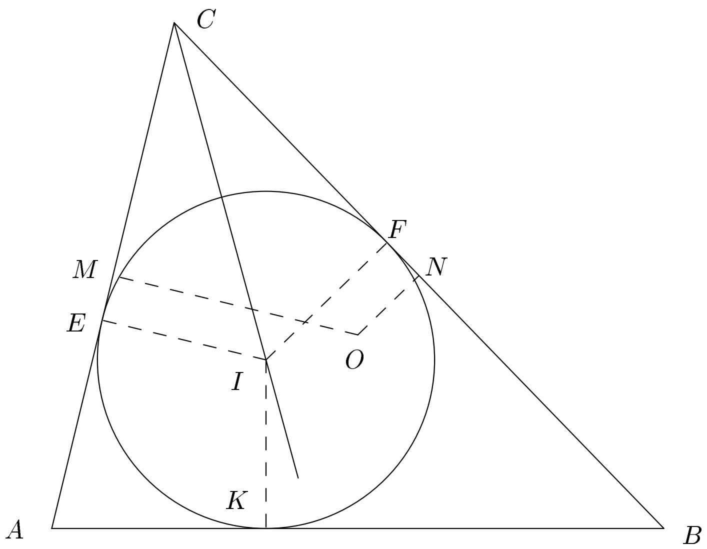
keskinen ympyrä, jonka säde on $1/\sqrt{3}$. Tarkastellaan tämän ympyrän ja kolmen ympyränkaaren leikkauspisteitä. Ne ovat kaikki punaisia tai vihreitä ja etäisyyden yksi päässä toisistaan. Tämä on ristiriita. Tehtävässä esitettyä jakoa ei voi tehdä.

Tehtävä 11

Piirretään niin iso ympyrä, että kaikki neljä pistettä ovat sen sisäpuolella. Pienennetään ympyrän sädettä ja siirretään sen keskipistettä kunnes ainakin kolme pisteistä on ympyrän kehällä. Neljäs piste on välttämättä ympyrän sisällä tai kehällä.

Tehtävä 12

Olkoon O kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän keskipiste, piste I kolmion sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste ja pisteet M ja N sivujen AC ja BC keskipisteet. Osoitetaan, että M, N ja I ovat ympyrällä, jonka halkaisija on OC. Suorien kulmien $\measuredangle CMO$ ja $\measuredangle ONC$ takia M ja N ovat tällä ympyrällä. Vielä täytyy osoittaa, että $\measuredangle CIO = 90°$. Olkoon sisäänpiirretyn ympyrän ja kolmion sivujen



sivuamispisteet E, F ja K kuten kuvassa. Nyt $BF + AE = BK + AK = AB$ ja $AB = \frac{1}{2}(BC + AC) = BN + AM$. Tästä $NF = ME$. Huomaa, että janat NF ja ME ovat janan OI projektiota sivuilla BC ja AC. Olkoon $\vec{e_1}$ vektorin $\vec{CA}$ suuntainen yksikkövektori ja $\vec{e_2}$ vektorin $\vec{CB}$ suuntainen yksikkövektori. Projektioiden pituuksien $NF = ME$ avulla voidaan kirjoittaa $|\vec{e_1} \cdot \vec{OI}| = |\vec{e_2} \cdot \vec{OI}|$, eli $\vec{e_1} \cdot \vec{OI} = \pm\vec{e_2} \cdot \vec{OI}$ tai $(\vec{e_1} \pm \vec{e_2}) \cdot \vec{OI} = 0$. Tällä yhtälöllä on kolme ratkaisua:

1. $\vec{OI} = \vec{0}$, eli $O = I$.
2. $\vec{e_1} + \vec{e_2} \perp \vec{OI}$, eli $CI \perp IO$.
3. $\vec{e_1} - \vec{e_2} \perp \vec{OI}$, tai $CI \parallel IO$. Kun O on kulmanpuolittajalla, kolmio ABC on tasakylkinen $AC = BC$. Nyt ABC on tasasivuinen, eli $O = I$.

Tehtävä 13

Valitaan piste F sivulta AB siten, että $AF = AE$ ja $BF = BD$. Jana AD on kulman A puolittaja. Siksi AD on tasasivuisen kolmion AFE kannan EF keskinormaali ja $DE = DF$. Vastaavasti $ED = EF$. Eli kolmio DEF on tasasivuinen. Lasketaan $\measuredangle AFE + \measuredangle BFD = 120°$ ja $\measuredangle FEA + \measuredangle BDF = 120°$. Nyt myös $\measuredangle CED + \measuredangle EDC = 120°$ ja $\measuredangle BCA = 60°$.

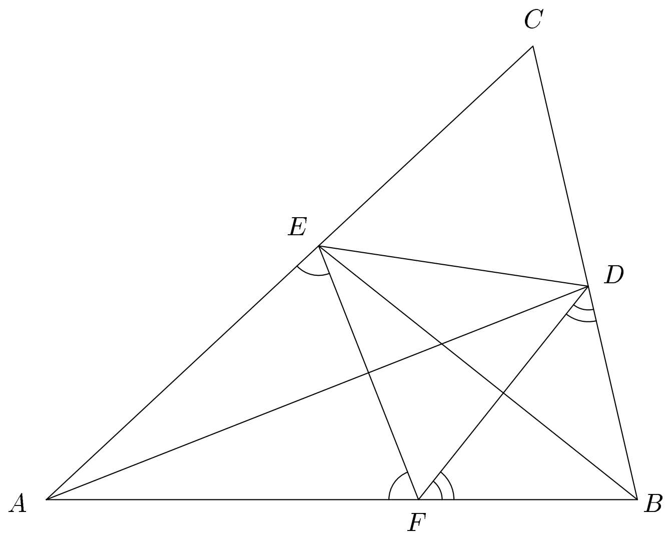
Tehtävä 14

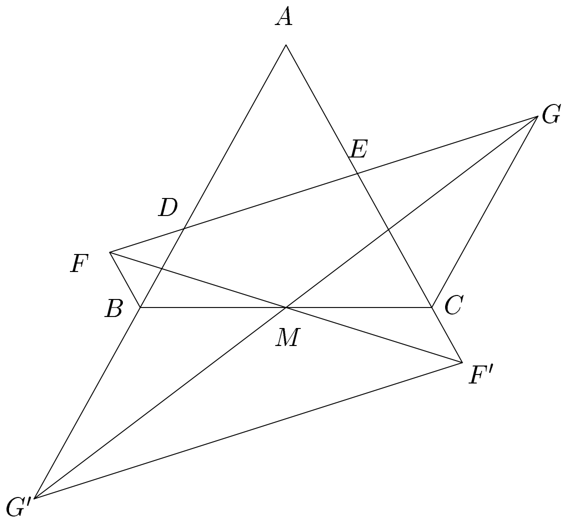
Olkoon h_B pisteen B etäisyys suorasta AC ja h_C pisteen C etäisyys suorasta AB. Puolisuunnikaiden pinta-alojen mukaan

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{\frac{1}{2}(BD + CG)h_C}{\frac{1}{2}(CE + BF)h_B}.$$

Tasakylkisyyden takia $h_B = h_C$, eli tehtävän väite on yhtäpitävästi

$$\frac{BD + CG}{CE + BF} = \frac{AD}{AE}. \tag{7}$$





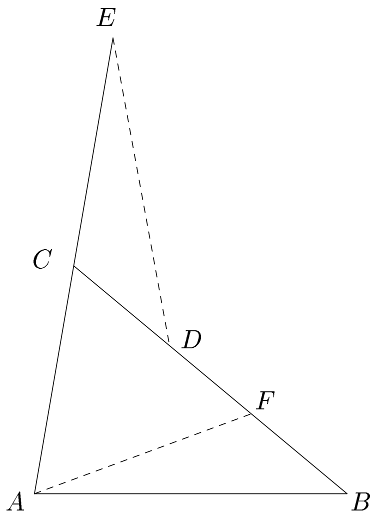
Olkoon M janan BC keskipiste. Olkoon F' ja G' pisteiden F ja G kuvia pisteen M suhteen. (Kuten kuvassa.) Tässä samassa kuvauksessa CG kuvautuu janalle BG', ja BF kuvautuu janalle CF'. Nyt $DE \parallel G'F'$ ja

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AG'}{AF'} = \frac{DG'}{EF'} = \frac{DB + CG}{EC + BF}.$$

Tehtävä 15

Olkoon $CD = a$ ja $CE = AC = BD = b$. Kosilauseen mukaan

$$AB = CA^2 + BC^2 - 2CA \cdot BC \cos 60^\circ =$$
$$b^2 + (a+b)^2 - 2b(a+b)\frac{1}{2} = a^2 + ab + b^2.$$



Edelleen kosinilauseen mukaan

$$ED = EC^2 + CD^2 - 2EC \cdot CD \cos 120^\circ =$$

$$b^2 + a^2 - 2ba\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + ab + b^2.$$

Tehtävä 16

Osoitetaan, että vastaus on $19^1 - 5^1 = 14$. Vastaoletus: Kokonaisluvuilla m ja n pätee $k = 19^n - 5^m < 14$. Tarkastellaan ensin tapausta n on parillinen. Koska $19 \equiv -1 \mod 10$, pätee $19^n \equiv 1 \mod 10$, eli k:n viimeinen numero on 6. Vastaoletuksen mukaan $19^n - 5^m = 6$. Oikea puoli on jaollinen kolmella. Tarkastellaan vasenta puolta modulo 3: $19 \equiv 1 \mod 3$ ja $19^n \equiv 1 \mod 3$. Vastaavasti $5^m \equiv 1 \mod 3$ vain jos m on parillinen. Valitsemalla $m = 2m'$ ja $n = 2n'$ voidaan kirjoittaa $(19^{n'} + 5^{m'})(19^{n'} - 5^{m'}) = 6$. Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja sillä vasemman puolen tekijöiden erotus on $2 \cdot 5^{m'}$, eikä luvulla 6 ole sopivaa tekijöihin jakoa. Tarkastellaan tapausta n on pariton. Kuten edellä, $19^n \equiv -1 \mod 10$, eli luvun k viimeinen numero on 4. Vastaoletuksen mukaan $19^n - 4^m = 4$. Mutta $19^n \equiv 1 \mod 3$ ja $5^m \equiv \pm 1 \mod 3$, eli $19^n - 5^m \equiv 1 \pm 1 \mod 3$. Tämä johtaa ristiriitaan, sillä $4 \equiv 1 \mod 3$.

Tehtävä 17

Vastaus: kyllä. Esimerkiksi lukujono $0, 2, 8, 14, 26$ täyttää tehtävän ehdot. Kun $a = 3$ tai $a = 5$ luvut $a + c_1, \ldots, a + c_5$ ovat alkulukuja. Lukujonon jäsenet kuuluvat eri jäännösluokkiin modulo 5. (Eli viidellä jaettaessa jakojäännös on jokaisella luvulla eri.) Kaikilla a:n arvoilla jokin luvuista $a + c_1, \ldots, a + c_5$ on viidellä jaollinen. Jotta luvut olisivat alkulukuja on viidellä jaollinen luku 5. Tämä on mahdollista vain jos $a = 3$ tai $a = 5$.

Tehtävä 18

Oikeanpuoleisen epäyhtälön neliöönkorottamisella saadaan

$$(a-b)^2 < 5 + 4\sqrt{4m+1}$$

tai yhtäpitävästi

$$(a+b)^2 < 5 + 4\sqrt{4m+1} + 4m = (\sqrt{4m+1}+2)^2,$$

eli

$$a + b < \sqrt{4m+1} + 2.$$

Koska tarkastellaan vain tapauksia $a > b$, jokainen tekijöihinjako $m = ab$ johtaa eri summan $a+b$ arvoon. Koska $m \equiv 2 \mod 4$ toinen luvuista a ja b on parillinen ja toinen pariton, eli $a + b$ on pariton. Lisäksi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = \sqrt{4m}.$$

Edelleen, koska $4m$ ei ole kokonaisluvun neliö (luku 4 ei ole luvun m tekijä), täytyy olla $a + b \geq \sqrt{4m+1}$.
Huomaa, että välillä $[\sqrt{4m+1}, \sqrt{4m+1}+2[$ on tasan yksi pariton luku. Koska $a+b$ on pariton ja suurempi kuin $\sqrt{4m+1}$, voi olla olemassa vain yksi tehtävän ehdot täyttävä ($a + b < \sqrt{4m+1} + 2$) lukupari (a, b).

Tehtävä 19

Etsitään parillisia lukuja, joita ei voida kirjoittaa muodossa $q - p^2$ minkään alkulukujen p ja q avulla. Jos $k = q - p^2$ ja p ja q ovat alkulukuja, ja jos $k \equiv 2 \mod 3$ täytyy olla joko $p^2 \equiv 1$ (ja $q \equiv 0$ ei voi olla alkuluku) tai $p^2 \equiv 3$ ($p = 3$ on ainoa mahdollisuus). Kokeillaan lukuja $k = 6n + 2$. Nämä ovat parillisia, $k \equiv 2$, ja yhtälöstä $k = q - p^2$ seuraa $p = 3$, eli $q = 6n + 11$. Nyt jos $n = 11m$ luku q ei voi olla alkuluku. Siis luvut muotoa $k = 66n + 2$ ovat tehtävässä kysyttyjä lukuja.

Tehtävä 20

Lauseke $a^2-b^2+c^2-d^2$ on pariton, joten yhden alkuluvuista on oltava parillinen. Pienin luvuista on d, joten $d = 2$. Alaspäin arvioimalla $1749 = a^2-b^2+c^2-d^2 > 9b^2 - b^2 + 4d^2 - d^2 = 8b^2 + 12$, eli $b^2 < 1737/8$ ja $b \leq 13$. Lisäksi epäyhtälöstä $4 = 2d < c < b/2 = 13/2$ saadaan $c = 5$. Mahdolliset vaihtoehdot ovat $b = 11$ tai $b = 13$. Kokeilemalla $b = 11$ saadaan $a^2 = 1849 = 43^2$. Jos $b = 13$ saadaan $a^2 = 1897$, joka ei ole kokonaisluvun neliö.
Ainoat luvut, jotka toteuttavat yhtälön ovat $a = 43$, $b = 11$, $c = 5$ ja $d = 2$, joista $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1999$.