Baltian tie 2000

Oslo, 4. 11. 2000

Version: Finnish
Aikaa: 4,5 tuntia

1. Olkoon K kolmion ABC sisäpiste. Olkoot M ja N sellaiset pisteet, että M ja K ovat suoran AB vastakkaisilla puolilla ja N ja K ovat suoran BC vastakkaisilla puolilla. Oletetaan edelleen, että $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = \measuredangle NBC = \measuredangle NCB = \measuredangle KAC = \measuredangle KCA$. Osoita, että $MBNK$ on suunnikas.

2. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $\measuredangle CAB = 90°$. Sivun AB keskipiste on M. A:n kautta kulkeva suoran CM normaali leikkaa sivun BC pisteessä P. Todista, että

$$\measuredangle AMC = \measuredangle BMP.$$

3. Kolmiossa ABC pätee $\measuredangle CAB = 90°$ ja $AB \neq AC$. Pisteet D, E ja F sijaitsevat sivuilla BC, CA ja AB tässä järjestyksessä sillä tavoin, että $AFDE$ on neliö. Todista, että suora BC, suora FE ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän pisteeseen A piirretty tangentti leikkaavat yhdessä pisteessä.

4. Kolmion ABC kulma $\measuredangle CAB = 120°$. Pisteet K ja L sijaitsevat sivuilla AB ja AC tässä järjestyksessä. Olkoot BKP ja CLQ kolmion ABC ulkopuolisia tasasivuisia kolmioita. Todista, että $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

5. Kolmiossa ABC

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Laske $\measuredangle CAB : \measuredangle BCA$.

6. Pertti johtaa yksityishotellia. Hän väittää, että aina kun hotellissa on $n \geq 3$ asukasta, heistä on mahdollista valita kaksi, joilla on muiden asukkaiden joukossa yhtä monta tuttavaa ja yhteinen tuttava tai yhteinen tuntematon henkilö. Millä luvun n arvoilla Pertti on oikeassa?

(Tuttavuus on aina molemminpuolista.)

7. 40×50 -kontrollitaulun jokainen nappula on joko päällä tai poissa päältä. Kun nappulaa painetaan, sen ja jokaisen muun samalla rivillä tai sarakkeella olevan nappulan tila muuttuu. Todista, että kontrollitaulun tilan voi muuttaa "kaikki pois päältä" -tilasta "kaikki päällä" -tilaan nappuloiden peräkkäisillä painalluksilla. Määritä pienin määrä painalluksia, jolla tämä voidaan tehdä.

8. Neljätoista ystävää tapasi juhlissa. Yksi näistä, Pertti, halusi lähteä nukkumaan aikaisin. Hän hyvästeli 10 ystävistään, mutta unohti hyvästellä 3 ja lähti nukkumaan. Hetken kuluttua hän palasi juhliin, hyvästeli jälleen 10 ystävistään (mutta ei välttämättä samoja kuin edellisellä kerralla) ja meni nukkumaan. Myöhemmin Pertti palasi takaisin useita kertoja ja hyvästeli joka kerralla 10 ystävistään. Heti kun hän oli hyvästellyt jokaisen ystävistään ainakin kerran, hän ei enää palannut takaisin. Aamulla Pertti tajusi, että hän ei ollut hyvästellyt keitään kahta ystävistään yhtä monta kertaa. Vähintään kuinka monta kertaa Pertti palasi juhliin?

9. Sammakko hyppelee $2k \times 2k$ -šakkilaudalla, joka koostuu yksikköruuduista. Sammakon loikat ovat pituudeltaan $\sqrt{1+k^2}$ yksikköä, ja ne ulottuvat ruudun keskipisteestä toisen ruudun keskipisteeseen. Jotkin m laudan ruuduista on merkitty $\times$:llä ja ne ruudut, joihin sammakko voi loikata $\times$:llä merkityistä ruuduista on merkitty $\circ$:lla (riippumatta siitä, onko niihin jo merkitty $\times$ vai ei). Olkoon n $\circ$:lla merkittyjen ruutujen lukumäärä. Todista, että $n \geq m$.

10. Liitutaululle on kirjoitettuna kaksi positiivista kokonaislukua. Aluksi toinen niistä on 2000 ja toinen pienempi kuin 2000. Jos liitutaululle kirjoitettujen lukujen aritmeettinen keskiarvo m on kokonaisluku, seuraava operaatio on sallittu: toinen luvuista pyyhitään pois ja korvataan luvulla m. Osoita, ettei tätä operaatiota voi tehdä enempää kuin kymmenen kertaa peräkkäin. Esitä esimerkki tapauksesta, jolloin operaatio voidaan tehdä kymmenen kertaa peräkkäin.

11. Positiivisten kokonaislukujen jonolle $a_1, a_2, \ldots$ pätee kaikilla m ja n seuraava: jos m jakaa luvun n ja $m < n$, niin a_m jakaa luvun a_n ja $a_m < a_n$. Määritä luvun a_{2000} pienin mahdollinen arvo.

12. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sellaisia positiivisia kokonaislukuja, ettei niistä mikään ole toisen alkuosa (esimerkiksi 12 on lukujen $\underline{12}$, $\underline{12}5$ ja $\underline{12}405$ alkuosa). Todista, että

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

13. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellainen kokonaislukujen aritmeettinen jono, että $i \mid a_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $n \nmid a_n$. Todista, että n on alkuluvun potenssi.

14. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että n on yhtäsuuri kuin 100 kertaa positiivisten tekijöidensä lukumäärä.

15. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka ei ole jaollinen kahdella eikä kolmella. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla k luku $(k+1)^n - k^n - 1$ on jaollinen luvulla $k^2 + k + 1$.

16. Todista, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

17. Etsi seuraavan yhtälöryhmän kaikki reaaliset ratkaisut:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1. \end{cases}$$

18. Määritä kaikki positiiviset reaaliluvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}).$$

19. Olkoon $t \geq \frac{1}{2}$ reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^n.$$

20. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\cdots(4n-2)(4n)}.$$

Todista, että $\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}$.