Baltian tie 2001 -joukkuekilpailun tehtävät

Hampuri, 4. marraskuuta 2001
Finnish version

1. Koetta varten laadittiin 8 tehtävää. Kukin opiskelija sai niistä 3. Ketkään kaksi opiskelijaa eivät saaneet enempää kuin yhden yhteisen tehtävän. Mikä on suurin mahdollinen opiskelijoiden määrä?

2. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Tutki, onko joukolla $\{1, 2, 3, \ldots\}$ n pareittain erillistä epätyhjää osajoukkoa siten, että jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan yhdellä ja vain yhdellä tavalla ilmaista korkeintaan n:n kokonaisluvun, joista kukin kuuluu eri osajoukkoon, summana.

3. Luvut $1, 2, \ldots, 49$ on sijoitettu 7×7-ruudukkoon, ja jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen lukujen summa on laskettu. Muutamat näistä 14 summasta ovat parittomia ja loput parillisia. Olkoon A kaikkien parittomien summien summa ja B kaikkien parillisten summien summa. Onko mahdollista, että luvut oli sijoitettu ruudukkoon siten, että $A = B$?

4. Olkoot p ja q kaksi eri alkulukua. Todista, että

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

(Tässä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

5. Annetut 2001 ympyrän kehän pistettä on kukin väritetty joko punaiseksi tai vihreäksi. Kaikki pisteet väritetään samanaikaisesti uudelleen seuraavalla tavalla: Jos pisteen P molemmat viereiset pisteet ovat samanvärisiä kuin P, P:n väri pysyy samana; muuten P:n väri vaihtuu vastakkaiseksi. Aloittamalla värityksestä F_1 päädytään värityksiin $F_2, F_3, \ldots$ toistamalla tätä uudelleenväritystä. Osoita, että on olemassa luku $n_0 \leq 1000$ siten, että $F_{n_0} = F_{n_0+2}$. Onko väite totta myös jos luku 1000 korvataan luvulla 999?

6. Pisteet A, B, C, D ja E ovat ympyrän c kehällä tässä järjestyksessä. Lisäksi $AB \parallel EC$ ja $AC \parallel ED$. Ympyrän c pisteeseen E piirretty tangentti leikkaa suoran AB pisteessä P. Suorat BD ja EC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $|AC| = |PQ|$.

7. $ABCD$ on suunnikas. Pisteen A kautta kulkeva ympyrä leikkaa janat AB, AC ja AD näiden sisäpisteissä M, K, N, tässä järjestyksessä. Todista, että

$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AC|.$$

8. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio ja N sivun BC keskipiste. Olkoon vielä $\angle AND = 135^\circ$. Osoita, että

$$|AB| + |CD| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |BC| \geq |AD|.$$

9. Olkoon $ABCD$ vinoneliö. Määritä niiden vinoneliön sisällä sijaitsevien pisteiden P joukko, joille pätee $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$.

10. Kolmion ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Määritä kolmion ABC kulmat, kun $|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ ja $\angle ADB = 45^\circ$.

11. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa. Kaikille kokonaisluvuille $a > 1$, $b > 1$ pätee

$$f(ab) = f(d)\left(f\left(\frac{a}{d}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right)\right),$$

missä $d = \mathrm{syt}(a, b)$. Määritä $f(2001)$:n kaikki mahdolliset arvot.

12. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja, joille $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ ja $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$. Osoita, että $\sum_{i=1}^{n} a_i > 3/2$.

13. Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono reaalilukuja, jolle pätee $a_0 = 1$ ja $a_n = a_{\lfloor 7n/9 \rfloor} + a_{\lfloor n/9 \rfloor}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku k siten, että $a_k < \dfrac{k}{2001!}$. (Myös tässä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

14. Pakassa on $2n$ korttia. Jokaiseen korttiin on kirjoitettu jokin reaaliluku x, $1 \leq x \leq 2$. (Eri korteissa voi olla eri lukuja.) Näytä, että kortit voidaan jakaa kahteen pinoon siten, että niissä oleviin kortteihin kirjoitettujen lukujen summat s_1 ja s_2 toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{s_1}{s_2} \leq 1.$$

15. Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono positiivisia reaalilukuja, joille pätee $i \cdot a_i^2 \geq (i+1) \cdot a_{i-1}a_{i+1}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja, ja olkoon $b_i = xa_i + ya_{i-1}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $i \geq 2$ pätee $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1}b_{i+1}$.

16. Olkoon f positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty reaaliarvoinen funktio, joka toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $n > 1$ on olemassa n:n alkutekijä p, jolle $f(n) = f(n/p) - f(p)$. Määritä $f(2002)$, kun $f(2001) = 1$.

17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista että joukosta $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ voidaan valita vähintään $2^{n-1} + n$ lukua siten, että $x + y$ ei ole $x \cdot y$:n tekijä millään kahdella valitulla luvulla x ja y, $x \neq y$.

18. Olkoon a pariton kokonaisluku. Osoita, että luvuilla $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ ei ole yhteisiä tekijöitä millään positiivisilla kokonaisluvuilla n ja m, $n \neq m$.

19. Mikä on pienin pariton positiivinen kokonaisluku, jolla on yhtä monta positiivista tekijää kuin luvulla 360?

20. Kokonaislukujono (a, b, c, d) voidaan muuntaa jonoiksi

$$(c, d, a, b), \quad (b, a, d, c), \quad (a + nc, b + nd, c, d), \quad (a + nb, b, c + nd, d),$$

missä n on mielivaltainen kokonaisluku. Voiko jonosta $(1, 2, 3, 4)$ saada jonon $(3, 4, 5, 7)$ toistamalla tällaisia muunnoksia?