Baltian tie 2003

Finnish version

Riika, 2. 11. 2003

Aikaa: 4,5 tuntia
Tehtävistä voi esittää kysymyksiä ensimmäisen 30 minuutin aikana.

1. Olkoon $\mathbb{Q}_+$ positiivisten rationaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, jotka toteuttavat kaikille $x \in \mathbb{Q}_+$ ehdot
   (1) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$,
   (2) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1)$.

2. Todista, että yhtälön
   $$x^3 + px + q = 0$$
   kaikki reaaliratkaisut toteuttavat epäyhtälön $4qx \le p^2$.

3. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $xyz = 1$. Todista, että
   $$(1+x)(1+y)(1+z) \ge 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että
   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. Jono a_n määritellään seuraavasti: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ ja $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$, kun $n \ge 2$. Todista, että kun $n \ge 1$, pätee
   $$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \ldots a_n.$$

6. Olkoot $n \ge 2$ ja $d \ge 1$ kokonaislukuja, joille $d \mid n$, ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalilukuja, joille $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Todista, että on olemassa ainakin $\binom{n-1}{d-1}$ tapaa valita d indeksiä $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_d \le n$ siten, että $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_d} \ge 0$.

7. Olkoon X joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ osajoukko, jolla on seuraava ominaisuus: jos $a, b \in X$, $a \ne b$, niin $a \cdot b \notin X$. Mikä on joukon X suurin mahdollinen koko?

8. Pöydällä on 2003 karkkia. Kaksi pelaajaa syö karkkeja vuorotellen. Vuorollaan pelaaja voi syödä joko yhden karkin tai puolet jäljellä olevista karkeista ("pienemmän puolikkaan", jos karkkien määrä on pariton); ainakin yksi karkki on aina syötävä. Viimeisen karkin syöjä häviää. Kummalla pelaajalla – aloittajalla vai toisella – on voittostrategia?

9. Tiedetään, että n on positiivinen kokonaisluku, $n \le 144$. Luvun selvittämiseksi sallitaan kymmenen kysymystä muotoa "onko n pienempi kuin a?" Kysymyksiin vastataan viipeellä: kysymyksen i vastaus annetaan vasta sitten, kun kysymys $i+1$ on esitetty, kun $i = 1, 2, \ldots, 9$. Kymmenennen kysymyksen vastaus annetaan heti, kun kysymys on esitetty. Etsi strategia, jolla luvun n voi selvittää.

10. Tason *hilapiste* on piste, jonka molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. Neljän pisteen (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ *keskiö* on piste $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right)$. Olkoon n suurin luonnollinen luku, jolla on seuraava ominaisuus: tasossa on n eri hilapistettä, joista minkään neljän keskiö ei ole hilapiste. Todista, että $n = 12$.

11. Onko mahdollista valita tasosta 1000 pistettä siten, että pisteiden välisistä etäisyyksistä ainakin 6000 on yhtäsuuria?

12. Olkoon $ABCD$ neliö. Olkoon M sivun BC sisäpiste ja N sivun CD sisäpiste, joille $\angle MAN = 45°$. Todista, että kolmion AMN ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on suoralla AC.

13. Olkoon $ABCD$ suorakulmio, jossa $BC = 2 \cdot AB$. Olkoon E sivun BC keskipiste ja P sivun AD mielivaltainen sisäpiste. Olkoon F pisteen A projektio suoralle BP ja G pisteen D projektio suoralle CP. Todista, että pisteet E, F, P ja G ovat saman ympyrän kehällä.

14. Olkoon ABC mielivaltainen kolmio, ja olkoot AMB, BNC ja CKA sen ulkopuolelle piirrettyjä tasasivuisia kolmioita. Janan MN keskipisteen kautta piirretään normaali suoralle AC, ja samoin janojen NK ja KM keskipisteiden kautta piirretään normaalit suorille AB ja BC. Todista, että nämä kolme normaalia leikkaavat samassa pisteessä.

15. Olkoon P jännenelikulmion lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Pisteen P kautta piirretty ympyrä koskettaa sivua CD sen keskipisteessä M ja leikkaa janat BD ja AC pisteissä Q ja R. Olkoon S janan BD sellainen piste, että $BS = DQ$. Pisteen S kautta piirretty AB:n suuntainen suora leikkaa suoran AC pisteessä T. Todista, että $AT = RC$. (*Jännenelikulmion* kärjet sijaitsevat saman ympyrän kehällä.)

16. Etsi kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), että $a - b$ on alkuluku ja ab on kokonaisluvun neliö.

17. Positiivisen kokonaisluvun n kaikki positiiviset tekijät on tallennettu taulukkoon kasvavassa järjestyksessä. Marin täytyy kirjoittaa ohjelma, joka kertoo mistä tahansa annetusta luvun n tekijästä $d > 1$, onko se alkuluku. Olkoon n:llä k sellaista tekijää, jotka eivät ole suurempia kuin d. Mari väittää, että näistä tekijöistä riittää tarkistaa ensimmäiset $\lceil k/2 \rceil$: jos niiden joukosta löytyy d:n yhtä suurempi tekijä, d on yhdistetty luku, muuten d on alkuluku. Onko Mari oikeassa?

18. Jokainen kokonaisluku on väritetty täsmälleen yhdellä väreistä SININEN, VIHREÄ, PUNAINEN ja KELTAINEN. Voidaanko tämä tehdä niin, että jos kokonaisluvut a, b, c ja d eivät ole kaikki nollia ja ovat samanvärisiä, niin $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jos $a^3 + b^3$ on kokonaisluvun neliö, niin $a + b$ ei ole kahden eri alkuluvun tulo.

20. Positiivisen kokonaisluvun n kaikkien n:ää pienempien positiivisten tekijöiden summan ja tällaisten tekijöiden lukumäärän summa on n. Osoita, etta $n = 2m^2$ jollakin kokonaisluvulla m.