Baltian Tie 2006

Turku, 3. Marraskuuta 2006

Version: Finnish

1. Reaalilukujonolle $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pätee

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{kun } n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

Kuinka monta peräkkäistä positiivista lukua jonossa voi enintään olla?

2. Oletetaan, että reaaliluvuille $a_i \in [-2, 17]$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 59$, pätee $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Osoita, että

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Osoita, että jokaista reaalikertoimista polynomia $P(x)$ kohden on olemassa positiivinen kokonaisluku m ja reaalikertoimiset polynomit $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ siten, että

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Olkoot a, b, c, d, e ja f ei-negatiivisia reaalilukuja, joille pätee $a + b + c + d + e + f = 6$. Määritä luvun

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

suurin mahdollinen arvo ja kaikki ne kuusikot $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$, joilla tämä suurin arvo saavutetaan.

5. Ajoittain epäluotettava professori on käsittelee viimeisessä kirjassaan erästä binääristä laskutoimitusta $*$. Kun tätä laskutoimitusta sovelletaan mihin hyvänsä kahteen kokonaislukuun, tulos on kokonaisluku. Laskutoimituksen tiedetään toteuttavan seuraavat kaksi aksioomaa:

a) $x * (x * y) = y$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}$.

Kirjassaan professori väittää, että

1. laskutoimitus $*$ on vaihdannainen: $x * y = y * x$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. laskutoimitus $*$ on liitännäinen: $(x * y) * z = x * (y * z)$ kaikille $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Mitkä näistä väitteistä seuraavat edellä mainituista aksioomista?

6. Määritä, kuinka monta alkiota on enintään seuraavat ehdot täyttävässä positiivisten kokonaislukujen joukossa:

1. Luvut kirjoitetaan joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kuuluvilla numeroilla.
2. Kukin numero esiintyy samassa luvussa korkeintaan kerran.
3. Jokaisen luvun numerot ovat nousevassa suuruusjärjestyksessä.
4. Jokaisella kahdella luvulla on ainakin yksi yhteinen numero (mahdollisesti eri paikassa).
5. Mikään numero ei esiinny kaikissa luvuissa.

7. Valokuvaaja otti kuvia juhlassa, johon osallistui 10 ihmistä. Jokainen 45 mahdollisesta ihmisparista esiintyi tasan yhdessä kuvassa, ja joka kuvassa esiintyy kaksi tai kolme ihmistä. Montako kuvaa valokuvaaja ainakin otti?

8. Laitoksen johtaja on havainnut laitoksessaan kuusi salaliittoa, joista jokaisessa on mukana tasan kolme henkilöä. Osoita, että johtaja voi jakaa laitoksensa kahdeksi laboratorioksi niin, että mikään salaliittolaisryhmä ei kuulu kokonaan samaan laboratorioon.

9. Säännöllisen viisikulmion joka kärkeen liitetään reaaliluku. Seuraavaa operaatiota voidaan toistaa: valitaan jotkin kaksi vierekkäistä kärkeä ja korvataan niissä olevat luvut lukujen aritmeettisella keskiarvolla. Onko aina mahdollista päätyä tilanteeseen, jossa kaikki viisi lukua ovat nollia, jos lähdetään tilanteesta, jossa kärkiin sijoitettujen viiden luvun summa on nolla?

10. 162 plusmerkkiä ja 144 miinusmerkkiä on sijoitettu 30×30-taulukkoon niin, että kussakin rivissä ja sarakkeessa on enintään 17 merkkiä. (Missään taulukon ruudussa ei ole enempää kuin yksi merkki.) Lasketaan jokaista plusmerkkiä kohden samalla rivillä olevien miinusmerkkien lukumäärä ja jokaista miinusmerkkiä kohden samassa sarakkeessa olevien plusmerkkien lukumäärä. Määritä näiden lukujen summan maksimiarvo.

11. Kolmion korkeusjanojen pituudet ovat 12, 15 ja 20. Mikä on kolmion ala?

12. Olkoon ABC kolmio, B_1 sivun AB keskipiste ja C_1 sivun AC keskipiste. Olkoon $P \neq A$ kolmioiden ABC_1 ja AB_1C ympäri piirrettyjen ympyröiden leikkauspiste. Olkoon $P_1 \neq A$ suoran AP ja kolmion AB_1C_1 ympäri piirretyn ympyrän leikkauspiste. Todista, että $2\,AP = 3\,AP_1$.

13. Piste D on kolmion ABC sivulla AB ja piste E on kolmion sivulla AC. Suorat BE ja CD leikkaavat pisteessä F. Todista, että jos

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

niin pisteet A, D, F ja E ovat samalla ympyrällä.

14. Pallon pinnalta on valittu 2006 pistettä. Todista, että pinta voidaan jakaa 2006:ksi yhteneväksi palaksi, joista jokaiseen kuuluu sisäpisteenä tasan yksi valituista pisteistä.

15. Kolmion ABC keskijanat leikkaavat toisensa pisteessä M. Pisteen M kautta kulkeva suora t leikkaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä X ja Y niin, että A ja C ovat t:n samalla puolella. Todista, että $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Onko olemassa neljä eri positiivista kokonaislukua niin, että kun minkä tahansa kahden niistä tuloon lisätään 2006, saadaan neliöluku?

17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $3^n + 1$ on jaollinen n^2:llä.

18. Jos n on positiivinen kokonaisluku, merkitään a_n:llä luvun $n^{(n^n)}$ viimeistä numeroa. Todista, että jono (a_n) on jaksollinen ja määritä jonon lyhimmän jakson pituus.

19. Onko olemassa positiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jossa kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n jokaisen n:n peräkkäisen luvun summa on jaollinen luvulla n^2?

20. 12-numeroinen luku, jossa esiintyy vain numeroita 1, 5 ja 9, on jaollinen 37:llä. Todista, että luvun numeroiden summa ei ole 76.

Työaikaa $4\frac{1}{2}$ tuntia. Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 5.