Baltian Tie 2006. Ratkaisuja

1. Jonon kuusi ensimmäistä alkiota ovat a_1, a_2, a_3, $a_4 = a_2 - a_1$, $a_5 = a_3 - a_2$ ja $a_6 = a_4 - a_3 = a_2 - a_1 - a_3$. Näiden summa on $a_1 + a_2 + a_3 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 - a_3 = 0$. Kuusi ensimmäistä alkiota eivät voi olla kaikki positiivisia, joten jonossa voi olla enintään viisi peräkkäistä positiivista alkiota. Jono 1, 2, 3, 1, 1 osoittaa, että jonossa voi olla tasan viisi positiivista peräkkäistä alkiota.

2. Merkitään $m = -2$ ja $M = 17$. Jokaisen a_i:n etäisyys välin $[m, M]$ keskipisteestä on enintään puolet välin pituudesta, joten

$$\left(a_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 \le \left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{59}\left(a_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{59} a_i^2 + 59\left(\frac{m+M}{2}\right)^2 - (m+M)\sum_{i=1}^{59} a_i \le 59\cdot\left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Koska

$$\sum_{i=1}^{59} a_i = 0,$$

on

$$\sum_{i=1}^{59} a_i^2 \le 59\left(\left(\frac{M-m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+M}{2}\right)^2\right) = -59\cdot m\cdot M = 2006.$$

3. Todistetaan induktiolla, että jokainen astetta n oleva polynomi $P(x)$ voidaan kirjoittaa vaaditulla tavalla. Asia on selvä, kun $n = 0$. Oletetaan sitten, että $P(x)$ on astetta n oleva polynomi, jonka korkeimmanasteinen termi on cx^n. Induktioaskel tulee otetuksi, jos voidaan osoittaa, että on olemassa sellaiset polynomit $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $\ldots$, $Q_k(x)$, että polynomin

$$P(x) - (Q_1(x)^3 + Q_2(x)^3 + \cdots + Q_k(x)^3)$$

aste on enintään $n-1$. Nyt on olemassa p niin, että $n = 3p$, $n = 3p+1$ tai $n = 3p+2$. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan asettaa $k = 1$ ja $Q_1(x) = \sqrt[3]{c}x^k$, toisessa tapauksessa $k = 3$ ja

$$Q_1(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^p(x-1),\quad Q_2(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^p(x+1),\quad Q_3(x) = -\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{p+1},$$

ja kolmannessa $k = 2$ ja

$$Q_1(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^p(x+1),\quad Q_2(x) = -\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{p+1}.$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että kun $P(x)$:stä vähennetään $Q_i(x)$-polynomien kuutioiden summa, termi cx^n tulee vähennetyksi pois. Induktioaskel on siis otettavissa ja väite on tosi.

4. Jos $a = b = c = 2$, $d = e = f = 0$, niin lausekkeen arvo on 8. Osoitetaan, että 8 on kysytty maksimiarvo. Geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välisen epäyhtälön nojalla on

$$8 = \left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3 \geq (a+d)(b+e)(c+f)$$
$$= abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf \geq abc + bcd + cde + def + efa + fab.$$

Siis $abc+bcd+cde+def+efa+fab \leq 8$ ja yhtäsuuruus pätee, kun $a+d = b+e = c+f = 2$ (koska $a+b+c+d+e+f = 6$) ja $ace = bdf = 0$. Kuusikko (a, b, c, d, e, f) voidaan siis kirjoittaa muotoon $(a, b, c, 2-a, 2-b, 2-c)$, ja pätee $ac(2-b) = b(2-a)(2-c) = 0$. Jos $a \neq 0, 2$, on oltava $b = 0$ ja $c = 0$ tai $b = 2$ ja $c = 2$. Samaa päätelyä jatkamalla todetaan, että maksimin tuottavat kaikki kolmikot (a, b, c), jotka ovat muotoa $(t, 0, 0)$, $(t, 2, 2)$, $(0, t, 0)$, $(2, t, 2)$, $(0, 0, t)$ ja $(2, 2, t)$, missä $0 \leq t \leq 2$.

5. Osoitetaan, että $*$ on vaihdannainen. Olkoot x ja y kokonaislukuja ja $z = x * y$. Aksiooman b) nojalla $z * y = x$. Aksiooman a) nojalla nyt $z * x = z * (z * y) = y$. Käytetään vielä aksioomaa b): $y * x = (z * x) * x = z$. Siis $x * y = y * x$.

Osoitetaan vastaesimerkillä, että $*$ ei välttämättä ole liitännäinen. Olkoon $x*y = -(x+y)$. Silloin $x * (x * y) = -(x - (x + y)) = y$ ja $(x * y) * y = -(-(x + y) + y) = x$. $*$ toteuttaa siis aksioomat a) ja b). Mutta esimerkiksi $0 * (0 * 1) = -(0 - (0 + 1)) = 1$ ja $(0 * 0) * 1 = -(-(0 + 0) + 1) = -1$, joten $*$ ei ole liitännäinen.

6. Osoitetaan, että kysytty maksimaalinen alkiomaarä on 32. Olkoon M jokin tehtävän mukainen lukujoukko. Ehtojen 1, 2 ja 3 nojalla jokainen M:n luku määräytyy yksikäsitteisesti luvun numeroiden joukon perusteella. Ehdon 4 perusteella jokaisella kahdella M:ään kuuluvan joukon numeroiden joukolla on yhteinen alkio. Joukolla $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on $2^6 = 64$ osajoukkoa. Jos jokin S:n osajoukko X on M:n jonkin luvun numeroiden joukko, niin komplementtijoukko $S \setminus X$ ei voi olla minkään M:n luvun numeroiden joukko. M:ssä voi olla enintään 32 alkiota. Joukolla S on yksi kuusialkioinen, kuusi viisialkioista ja $\binom{6}{4} = 15$ nelialkioista osajoukkoa, yhteensä siis 22 osajoukkoa, joissa on ainkin neljä alkiota. Jokaisella kahdella tällaisella joukolla on yhteinen alkio. Joukolla on $\binom{5}{2} = 10$ sellaista kolmialkioista osajoukkoa, jossa esiintyy luku 6. Kullakin tällaisella osajoukolla on ainakin yksi yhteinen alkio jokaisen nelialkioisen osajoukon kanssa: ellei se ole 6, niin joukoissa on yhteensä kuusi sellaista alkiota, jotka kaikki kuuluvat viisialkioiseen joukkoon $S \setminus \{6\}$. Näihin 32:een S:n osajoukkoon liittyvät luvut muodostavat 32 alkion joukon.

7. Osoitetaan, että kuvia on otettu ainakin 19. Olkoon kuvia, joissa esiintyy kolme ihmistä ja siis myös kolme paria, x kappaletta, ja kuvia, joissa esiintyy kaksi ihmistä, y kappaletta. Koska jokainen pari esiintyi tasan yhdessä kuvassa, on oltava $3x + y = 45$. Jokainen vieras esiintyi parina yhdeksän muun vieraan kanssa. Koska 9 on pariton, ei ole mahdollista, että joku vieras olisi mukana vain kolmikkokuvissa. Näin ollen jokainen on ollut ainakin yhdessä parikuvassa, joten $y \geq 5$ ja $x \leq 13$. Kuvien lukumäärä on siis $x+y = 45-2x \geq 45-26 = 19$.

Osoitetaan sitten, että 39 kuvaa riittää. Numeroidaan osallistujat numeroin 0, 1, 2, ..., 9. Tarkastellaan osallistujia 1, 2, ..., 8. Otetaan kuvat 123, 345, 567, 781. Sama pari ei esiinny missään kahdessa kuvassa; näissä kuvissa on siis 12 paria. Asetetaan osallistujat 1, 2, ..., 8 istumaan pyöreän pöydän ympärille. Kaikki jo kuvissa olleet parit istuvat niin, että samassa kuvassa olleiden välissä istuu enintää yksi henkilö. Jos nyt valitaan pöydän ympäriltä pareja, joiden välissä on kaksi henkilöä, ja kuvataan nämä osallistujan 0 kanssa, voidaan ottaa esimerkiksi kuvat 014, 058, 027 ja 036, joissa on 12 sellaista paria, jotka eivät olleet mukana ensimmäisissä neljässä kuvassa. Pöydän ympäriltä saadaan vielä neljä paria, joiden välissä on kaksi muuta; nämä parit voidaan kuvata osallistujan 9 kanssa: 169, 259, 389, 479. Kolmikkoon 246 sisältyvät parit eivät esiinny missään aikaisemmista kuvista. Kun se liitetään mukaan, on otettu 13 kuvaa ja näissä on esiintynyt 39 paria. Loput 6 paria voidaan kuvata parikuvissa, jolloin kuvia tulee $13 + 6 = 19$.

8. Olkoon laitoksessa n työntekijää. Koska $\binom{4}{3} = 4 < 6$, niin $n \ge 5$. Jos $n = 5$, on olemassa kolme työntekijää, jotka eivät muodosta salaliittoa. Heidät voidaan sijoittaa toiseen laboratorioon ja loput kaksi toiseen. Jos $n = 6$, niin kolmikkoja on $\binom{6}{3} = 20$. On olemassa kolmikko, joka ei muodosta salaliittoa ja jonka komplementtikaan ei muodosta salaliittoa. Laboratoriot voidaan muodostaa näistä kahdesta joukosta. Osoitetaan induktiolla, että jako on mahdollinen, kun $n \ge 7$. Salaliitoissa on enintään $6 \cdot 3 = 18$ työntekijäparia. Laitoksen tyäntekijöistä voidaan muodostaa $\binom{n}{2} \ge \binom{7}{2} = 21$ paria. Työnytekijöissä on siis jotkin kaksi, esimerkiksi X ja Y, jotka eivät kuulu mihinkään salaliittoon. Poistetaan joukosta Y. Induktio-oletuksen mukaan jäljelle jääneet $n - 1$ työntekijää voidaan jakaa kahdeksi laboratorioksi niin, että kummassakaan ei ole yhtään salaliitto kolmikkoa. Sijoitetaan nyt Y samaan laboratorioon kuin X. Tämä ei muuta tilannetta, joten n:n työntekijän laitos on myös jaettavissa kahdeksi laboratorioksi halutulla tavalla.

9. Osoitetaan, että on olemassa alkutilanteita, joista ei päästä haluttuun lopputilanteeseen. Tällainen on esimerkiksi se, jossa yhteen kärkeen sijoitetaan $\frac{4}{5}$ ja muihin $-\frac{1}{5}$. Jos siitä päästäisiin tilanteeseen, jossa kaikissa kärjissä on 0, niin alkutilanteesta, jossa yhdessä kärjessä on 1 ja muissa 0 päästäisiin samoin askelin tilanteeseen, jossa joka kärjessä olisi $\frac{1}{5}$. Mutta jälkimmäisestä alkutilanteesta lähdettäessä joka kärjessä on aina luku, joka on muotoa $\frac{k}{2^m}$, missä m on ei-negatiivinen kokonaisluku. Luku $\frac{1}{5}$ ei ole tätä muotoa.

10. Tehtävässä on kahdenlaisia lukuja, "rivilukuja" eli $+$-merkkeihin liittyviä, ja "sarakelukuja" eli $-$-merkkeihin liittyviä. Käsitellään ensin rivilukuja. Tarkastellaan mielivaltaista riviä. Sivin ruuduissa on p $+$-merkkiä ja m $-$-merkkiä, $m + p \le 17$. Tältä riviltä laskettujen rivilukujen summa on mp. Kirjoitetaan nyt jokaiseen sellaiseen ruutuun, jossa on jokin merkki, luku $\frac{mp}{m+p}$. Kaikkien rivilukujen summa on nyt sama kuin kaikkien 306 ruutuuun kirjoitettujen lukujen summa. Tarkastellaan funktiota f,

$$f(m,\, p) = \frac{mp}{m+p}, \quad m + p \le 17.$$

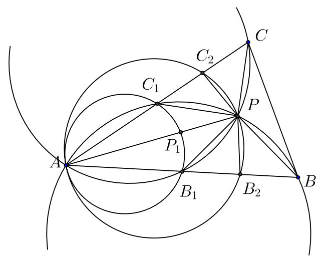
Funktio on m:n suhteen kasvava, joten jos $m + p < 17$, $f(m,\, p)$:n arvoa voidaan kasvattaa lisäämällä m:ää. Jos $m + p = 17$, niin

$$f(m,\, p) = \frac{m(17-m)}{17},$$

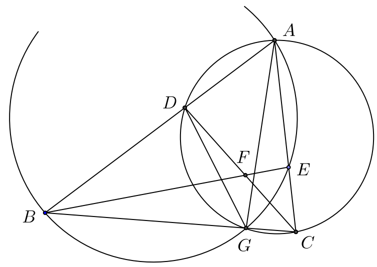
ja f maksimoituu (kokonaislukujen joukossa!), kun $m = 8$ tai $m = 9$. Silloin f saa arvon $\frac{72}{17}$. Rivilukujen summa on siis enintään $306 \cdot \frac{72}{17} = 18 \cdot 72$. Täsmälleen sama päättely osoittaa, että sarakelukujen summa on enintään $18 \cdot 72$. Tehtävässä kysytty summa on siis enintään $36 \cdot 72 = 2592$. Tämä maksimi saavutetaan selaisessa konfiguraatiossa, jossa jokaisella rivillä, joka ei ole tyhjä, on 9 $+$- ja 8 $-$-merkkiä. Tällainen asetelma saadaan esimerkiksi 18×18-ruudukosta, jonka yhdeksälle ”yleistetylle” lävistäjälle merkitään $+$-merkkejä ja kahdeksalle lävistäjälle $-$-merkkejä, ja viimeinen lävistäjä jätetään tyhjäksi.

11. Olkoot korkeusjanat $h_a = 12$, $h_b = 15$ ja $h_c = 20$ ja kolmion ala T. Koska $2T = ah_a = bh_b = ch_c$, niin $T = 6a$ ja $b = \frac{4}{5}a$, $c = \frac{3}{5}a$. Kolmion piirin puolikas on $p\frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)a = \frac{6}{5}a$. Heronin kaavan nojalla $T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{36}{5^4}a^4$. Koska myös $T^2 = 36a^2$, on $a^2 = 5^4$ ja $a = 25$. Siis $T = 6a = 150$.

12. Jännenelikulmiosta AB_1PC saadaan $\angle C_1CP = \angle ACP = \angle PB_1B$ ja jännenelikulmiosta $ABPC_2$ $\angle B_1BP = \angle ABP = \angle CC_1P$. Kolmiot B_1BP ja CC_1P ovat siis yhdenmuotoisia. Olkoot vielä B_2 ja C_2 janojen BB_1 ja CC_1 keskipisteet. Silloin mainitusta yhdenmuotoisuudesta seuraa $\angle B_1PB_2 = \angle CPC_2$ ja siis $\angle B_2PC_2 = \angle B_1PC$. Koska piste P on ympyrällä AB_1C, $\angle B_1PC$ ja $\angle CAB$ ovat vieruskulmia. Koska siis myös $\angle CAB$ ja $\angle B_2PC_2$ ovat vieruskulmia, nelikulmio AB_2PC_2 on jännenelikulmio, ts. P on kolmion AB_2C_2 ympärysympyrällä. Kolmioiden AB_1C_1 ja AB_2C_2 ympärysympyrät ovat homoteettisia. Homotetiakeskus on A ja homotetiasuhde $2:3$. Siten myös $AP_1 : AP = 2:3$, ja väite on todistettu.



13. Koska $BC^2 > BD \cdot BA$, janalla BC on piste G, jolle pätee $BG \cdot BC = BD \cdot BA$. Kolmiot BGD ja BAC ovat tällöin yhdenmuotoiset (sks). Erityisesti $\angle BDG = \angle BAC$, joten nelikulmio $ADGC$ on jännenelikulmio. Mutta $CE \cdot CA = BC^2 - BD \cdot BA = BC \cdot (BG + CG) - BC \cdot BG = CB \cdot CG$. Tästä seuraa samoin kuin edellä, että $ABGE$ on myös jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle ADC = \angle AGC$ ja $\angle AEB = \angle AGB$. Mutta tämä merkitsee sitä, että $\angle ADC$ ja $\angle AEB$ ovat vieruskulmia, joten $ADFE$ on jännenelikulmio ja väite on todistettu.



14. Valitaan pohjois- ja etälänapa P ja E niin, että mitkään kaksi pistettä eivät ole samalla leveyspiirillä eikä mikään pisteistä ole kummallakaan navalla. Piirretään jokaisen pisteen kautta leveyspiiri (siis pikkuympyrä, jonka taso on kohtisuorassa suoraa PE vastaan.) Jaetaan jokainen tällainen pikkuympyrä 2006:ksi yhteneväksi kaareksi niin, että mikään annetuista pisteistä ei ole töllaisen kaaren päätepiste. Ilmaus "yhdistetään pisteet A ja B" tarkoittaa, että piirretään A:n ja B:n kautta kulkevan isoymyrän lyhempi kaari $\overset{\frown}{AB}$. Olkoot jakopisteet $A_{i,j}$, $1 \le i \le 2006$, $1 \le j \le 2006$, missä i ilmaisee, pohjoisesta alkaen, leveyspiirin järjestysnumeron ja j pisteen järjestysnumeron leveyspiirillä. Numerointi voidaan suorittaa niin, että pisteiden $A_{i,i}$ ja $A_{i,i+1}$ välissä (mod 2006) on yksi annetuista pisteistä. Yhdistetään nyt pisteet

$$P,\, A_{1,1},\, A_{2,1},\, A_{3,1},\, \ldots,\, A_{2006,1},\, E$$
$$P,\, A_{1,2},\, A_{2,2},\, A_{3,2},\, \ldots,\, A_{2006,2},\, E$$
$$\vdots$$
$$P,\, A_{1,2006},\, A_{2,2006},\, A_{3,2006},\, \ldots,\, A_{2006,2006},\, E$$

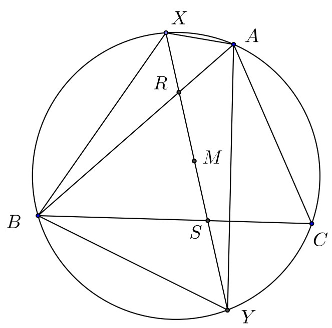
Syntyneet 2006 isoympyränkaarimurtoviivaa jakavat pallon pinnan 2006 yhtenevään alueeseen (ne voidaan kuvata toisilleen kierroilla suoran PE ympäri). Jokaisessa alueessa on tasan yksi annetuista pisteistä.

15. Leikatkoon t AB:n pisteessä R ja AC:n pisteessä S. Koska $\angle XBA = \angle XYA$, kolmiot BRX ja YRA ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{AY}{BX} = \frac{RY}{BR}.$$

Kolmioiden BYR ja XAR yhdenmuotoisuudesta seuraa vastaavasti

$$\frac{AX}{BY} = \frac{AR}{RY}.$$



Siis

$$\frac{AX \cdot AY}{BX \cdot BY} = \frac{AR}{BR}.$$

Samoin osoitetaan, että

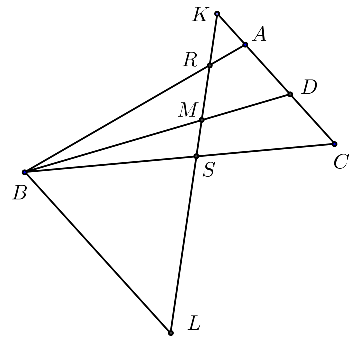
$$\frac{CX \cdot CY}{BX \cdot BY} = \frac{CS}{BS}.$$

On siis osoitettava, että

$$\frac{AR}{BR} + \frac{CS}{BS} = 1.$$

Jos $RS \| AC$, molemmat yhteenlaskettavat ovat $= \frac{1}{2}$ (koska RS kulkee mediaanien leikkauspisteen kautta).

Jos RS ei ole AC:n suuntainen, piirrretään B:n kautta AC:n suuntainen suora. Leikatkoon RS sen pisteessä L ja suoran AC pisteessä K ja olkoon D janan AC keskipiste. Kolmiot MDK ja MBL ovat yhdenmuotoisia suhteessa $1 : 2$, joten $BL = 2 \cdot KD$. Toisaalta yhdenmuotoisista kolmioista RAK, RBL ja SCK, SBL saadaan



$$\frac{AR}{RB} = \frac{AK}{BL}, \quad \frac{CS}{SB} = \frac{CK}{BL} = \frac{AK + 2 \cdot AD}{BL}.$$

Väite saadaan, kun kaksi edellistä yhtälöä lasketaan puolittain yhteen.

16. Oletetaan, että tehtävässä esitetyt neljä lukua olisivat olemassa. Koska neliöluvut ovat modulo 4 joko nollia tai ykkösiä ja $2006 \equiv 2 \mod 4$, niin jokaisen kahden näistä neljästä luvusta tulo on joko $\equiv 2$ tai $\equiv 3 \mod 4$. Lukujen joukossa on oltava ainakin kolme paritonta (koska kahden parillisen luvun tulo on $\equiv 0 \mod 4$). Kolmesta parittomasta luvusta ainakin kaksi on kongruentteja $\mod 4$. Näiden tulo on kongruentti $\mod 4$ joko luvun $1^1 = 1$ tai $3^2 = 9 \equiv 1$ kanssa. Vaadittuja lukuja ei siis ole olemassa.

17. Osoitetaan, että $n = 1$ on ainoa tehtävän ehdon täyttävä kokonaisluku. Havaitaan ensin, että jos $n^2 | 3^n + 1$, niin n on pariton. Jos nimittäin n on parillinen, niin $3^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 = 2 \mod 4$, mutta $n^2 \equiv 0 \mod 4$. Jos nyt $n^2 | 3^n + 1$, niin n:n pienin alkutekijä p on pariton ja > 3. Siis $p \geq 5$. Koska $p | 3^n + 1$, niin $p | 3^{2n} - 1$. Okoon nyt k pienin kokonaisluku, jolle $p | 3^k - 1$. Silloin $k | 2n$. (Koska p on tekijänä luvussa $3^{2n} - 3^k + 3^k - 1 = 3^k(3^{2n-k} - 1) + 3^k - 1$, se on tekijänä luvussa $3^{2n-k} - 1$; jos $2n - k > k$, p on myös tekijänä luvussa $2n - 2k$ jne.; äärellisen monen askeleen jälkeen päädytään tilanteeseen $2n - tk = k$.) Toisaalta Fermat'n pienen lauseen perusteella $p | 3^{p-1} - 1$, joten samoin kuin edellä, voidaan päätellä $k | p - 1$. Koska $p \geq 5$, p ei ole lukujen $3^1 - 1 = 2$ tai $3^2 - 1 = 8$ tekijä. Siis $k \geq 3$. Niinpä s.y.t.$(2n, p-1) \geq k \geq 3$. Edelleen s.y.t.$(n, p-1) > 1$. Luvulla n on siis varmasti pienempiä tekijöitä ja myös alkutekijöitä kuin p. Ristiriita todistaa, että jos $n > 1$, niin n^2 ei ole luvun $3^n + 1$ tekijä.

18. Olkoon b_n luvun n ja c_n luvun n^n viimeinen numero. Jos $b_n = 0, 1, 5, 6$, niin myös $c_n = a_n = 0, 1, 5, 6$. Jos $b_n = 9$, niin n^n on pariton; koska 9^2 päättyy ykköseen, niin $a_n = 9$. Jos $b_n = 4$, niin n^n on parillinen ja $a_n = 6$. Jos b_n on 2 tai 8, niin n^n on jaollinen neljällä. Tarkastamalla lukujen 2^k ja 8^k viimeisten numeroiden jaksoja huomataan, että tällöin $a_n = 6$. Jäljellä ovat vielä $b_n = 3$ ja $b_n = 7$. Luvun 3^k viimeisen numeron jakso on $3, 9, 7, 1, \ldots$ ja luvun 7^k viimeisen numeron jakso on $7, 9, 3, 1, 7, \ldots$. Jos $b_n = 3$ tai $b_n = 7$, niin $n \equiv 1 \mod 4$ tai $n \equiv -1 \mod 4$. Edellisessä tapauksessa $n^n \equiv 1 \mod 4$, jälkimmäisessä tapauksessa $n^n \equiv -1 \mod 4$. Jos $b_n = 3$ ja $n \equiv 1 \mod 4$, niin $a_n = 3$ ja jos $n \equiv -1 \mod 4$, niin $a_n = 7$. Samoin, jos $b_n = 7$ ja $n \equiv 1 \mod 4$, niin $a_n = 7$ ja jos $n \equiv -1 \mod 4$, niin $a_n = 3$. Koska 3:een (tai 7:ään) päättyvät luvut on $\equiv 3$ tai $\equiv 13 \mod 20$ ($\equiv 7$ tai $\equiv 17 \mod 20$), a_n saa vuorotelle arvot 7 ja 3, kun $b_n = 3$ ja vuortellen arvot 3 ja 7, kun $b_n = 7$. Kun edellä annetut tiedot kerätään yhteen, nähdään, että a_n:llä on jakso, jonka pituus on 20, ja tämä on 1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0; tätä lyhempiä jaksoja ei ole.

19. Todistetaan, että tällaisia jonoja on olemassa. Itse asiassa jonon voi aloittaa mistä tahansa positiivisesta kokonaisluvusta, sillä pätee seuraava tulos: Jos $a_1, \ldots, a_k$ ovat sellaiset positiiviset kokonaisluvut, että $n^2|(a_{i+1} + \cdots + a_{i+n})$ kaikilla $n \le k$ ja $i \le k - n$, niin on olemassa a_{k+1} niin, että $n^2|(a_{i+1} + \cdots + a_{i+n})$ kaikilla $n \le k+1$ ja $i \le k+1-n$. Todistetaan tämä. Riittää, että osoitetaan luvun $x = a_{k+1}$ voitavan valita niin, että $xequiv - (a_{k-n+2} + \cdots + a_k) \mod n^2$ kaikilla $n \le k - 1$. Luvun x on siis toteutettava $k+1$ kongruenssiyhtälöä. Osoitetaan, että osa näistä on tarpeettomia. Jos p on alkuluku ja m on sellainen positiivinen kokonaisluku, että $p^m \le k + 1$ ja x toteuttaa kongruenssiyhtälön, kun modulina on p^{2m}, niin x toteuttaa myös sen kongruenssiyhtälön, jossa moduli on $p^{2(m-1)}$. Ryhmitellään luvut $a_1, \ldots, a_k$, x p^{m-1}:n pituisiin jaksoihin. Lukujen $a_1, \ldots, a_k$ ominaisuuden perusteella kunkin jakson, viimeistä lukuun ottamatta, summa on jaollinen $p^{2(m-1)}$:llä koska kaikkien lukujen summa on jaollinen p^{2m}:llä, myös viimeisen jakson lukujen summa ja siten kaikkien lukujen summa on jaollinen $p^{2(m-1)}$:llä. Todetaan sitten, että jos c ja d ovat yhteistekijättömiä ja kongruenssiyhtälä toteutuu moduleilla c^2 ja d^2, se toteutuu myös modulilla $(cd)^2$. Tämä nähdään ryhmittämällä viimeiset cd luvuista $a_1, \ldots, a_k$, x d:ksi c:n peräkkäisen luvun jonoksi ja c:ksi d:n peräkkäisen luvun jonoksi. Kun käytetään hyväksi lukujen $a_1, \ldots, a_k$ ominaisuutta ja oletusta, saadaan, että viimeisten cd:n luvun summa on jaollinen sekä c^2:lla että d^2:lla; koska c:llä ja d:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, summa on jaollinen myös $(cd)^2$:lla. – Edelliset huomiot osoittavat, että ratkaistavaksi jää vain sellaisia kongruenssiyhtälöitä, joiden moduli on sellaisen alkuluvun p sellainen m:s potenssi, että $p^m \le k + 1 < p^{m+1}$. Kiinalaisen jäännöslauseen perusteella kongruenssiyhtälöryhmällä on ratkaisu. (Jos $a_1 = 1$, jono alkaa 1, 3, 5, 55, 561, 851, 63253, 110055,....)

20. Koska $1000 \equiv 1 \mod 37$ ($9 \cdot 3 \cdot 37 = 9 \cdot 111 = 999$), niin luku $x = a_n 10^{3n} + a_{n-1}10^{3(n-1)} + \cdots + a_1 10^3 + a_0$ on jaollinen 37:llä jos ja vain jos $a_a + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ on jaollinen 37:llä. 12-numeroinen luku $A = 111\,111\,111\,111$ on siten jaollinen 37:llä. Olkoon N tehtävässä ilmoitettu 12-numeroinen luku. Oletetaan, että sen numeroiden summa on 76. Silloin $N - A$ on jaollinen 37:llä ja $N - A$ kirjoitetaan pelkästään numeroilla 0, 4 ja 8 ja sen numeroiden summa on $76 - 12 = 64$. $N - A$ on siten jaollinen neljällä, ja $M = \frac{1}{4}(N - A)$ on 37:llä jaollinen luku, joka kirjoitetaan vain numeroilla 0, 1 ja 2. M:n numeroiden summa on 16. Ryhmitellään M:n numerot kolmen ryhmiin; olkoon S näiden neljän luvun summa. Edellä sanotun perusteella S on jaollinen 37:llä. Summassa on enintään numero 8 ja summan numeroiden summa on edelleen 16, koska yhteenlaskussa ei tarvita muistinumeroita. Nyt $S \equiv 16 \equiv 1 \mod 3$. Koska $37 \equiv 1 \mod 3$, nähdään, että $S/37 \equiv 1 \mod 3$. Siis S on muotoa $37(3k+1)$ oleva kolminumeroinen luku. Nämä luvut ovat 37, 128, 259, 370, 481, 592, 703, 814 ja 925. Jokaisessa on kuitenkin joko numero 9 tai numeroiden summa, joka ei ole 16. Ristiriita todistaa väitteen.