Baltian Tie 2007

Kööpenhamina, 3. maraskuuta 2007

1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jakamista kaksialkioisiksi osajoukoiksi $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Joukon P_i alkioiden tulo olkoon p_i. Osoita, että

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Kokonaislukujonoa a_1, a_2, $a_3, \ldots$ kutsutaan *eksaktiksi*, jos $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$, kun $n > m$. Osoita, että on olemassa eksakti jono, jossa $a_1 = 1$ ja $a_2 = 0$, ja määritä a_{2007}.

3. Olkoot F, G, H polynomeja, joiden kertoimet ovat reaalilukuja, joiden aste on korkeintaan $2n+1$ ja jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) Kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

(2) On olemassa erisuuret reaaliluvut x_1, x_2, $\ldots$, x_n joilla

$$F(x_i) = H(x_i) \quad \text{kun } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

(3) On olemassa reaaliluku x_0, joka eroaa luvuista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja jolle

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Osoita, että $F(x) + H(x) = 2G(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.

4. Olkoot a_1, a_2, $\ldots$ a_n positiivisia reaalilukuja ja olkoon $S = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Osoita, että

$$(2S+n)\left(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots a_na_1\right) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Funktio f on määritelty kaikkien nollasta poikkeavien reaalilukujen joukossa ja se saa kaikki reaalilukuarvot paitsi arvon 1. Tiedetään myös, että

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

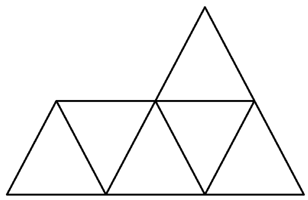
kaikilla x, $y \neq 0$ ja

$$f\left(f(x)\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

kaikilla $x \notin \{0, 1\}$. Määritä kaikki nämä ehdot toteuttavat funktiot f.

6. Freddy kirjoittaa luvut 1, 2, …, n jossakin järjestyksessä. Sitten hän muodostaa listan pareista (i, j), missä $1 \le i < j \le n$ ja i:s luku on suurempi kuin j:s luku hänen kirjoittamassaan permutaatiossa. Tämän jälkeen Freddy toistaa seuraavaa toimenpidettä niin kauan kuin se on mahdollinen: valitaan pari (i, j) listalta, vaihdetaan i:s ja j:s luku permutaatiossa, poistetaan (i, j) listalta. Osoita, että Freddy voi valita parit sellaisessa järjestyksessä, että kun prosessi loppuu, niin luvut permutaatiossa ovat nousevassa järjestyksessä.

7. *Viritys* koostuu oheisen kuvan mukaisesti kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on 1. Määritä kaikki mahdolliset kokonaisluvut n, joilla tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on n, voidaan täysin peittää virityksillä (peilaukset ja käännöt on sallittu, mutta kaksi viritystä ei saa mennä päällekkäin).



8. Kutsutaan kokonaislukujoukkoa A *eristämättömäksi*, jos kaikilla $a \in A$ vähintään yksi luvuista $a-1$ ja $a+1$ myös kuuluu joukkoon A. Osoita, että on olemassa tasan $(n-4)^2$ viiden alkion eristämätöntä joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa.

9. Yhdistys äänestää itselleen hallituksen. Jokainen yhdistyksen jäsen on valinnut 10 ehdokasta, mutta hän on tyytyväinen, jos vähintään yksi tulee valituksi hallitukseen. Jokaista kuutta yhdistyksen jäsentä kohden on olemassa kahden hengen hallitus, johon kaikki nämä kuusi jäsentä ovat tyytyväisiä. Osoita, että on olemassa kymmenen hengen hallitus, johon koko yhdistys on tyytyväinen.

10. 18×18-ruudukossa kaikki ruudut voivat olla mustia tai valkoisia. Aluksi kaikki ruudut on väritetty valkoisiksi. Voimme suorittaa seuraavan operaation: valitaan yksi sarake tai rivi ja vaihdetaan väri kaikkien sen ruutujen väri. Onko mahdollista toistaa tätä operaatiota niin, että tuloksena on ruudukko, jossa on täsmälleen 16 mustaa ruutua?

11. AD, BE ja CF ovat kolmion ABC korkeusjanat. Pisteet P, Q, R ja S toteuttavat seuraavat ehdot

(1) P on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.
(2) Kaikki janat PQ, QR ja RS ovat yhtä pitkiä kuin kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde.
(3) Suunnistettu jana PQ on samansuuntainen kuin suunnistettu jana AD. Vastaavasti QR on samansuuntainen kuin BE ja RS on samansuuntainen kuin CF.

Osoita, että S on kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

12. Olkoon M kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sillä kaarella AB, jolla piste C ei ole. Oletetaan, että pisteen M projektiot suorilla AB ja BC ovat kolmion sivuilla, eikä niiden jatkeilla. Merkitään näitä projektioita X:llä ja Y:llä tässä järjestyksessä. Olkoot K ja N janojen AC ja XY keskipisteet. Osoita, että $\angle MNK = 90°$.

13. Olkoot $t_1, t_2, \ldots, t_k$ eri suoria avaruudessa, ja olkoon $k > 1$. Osoita, että on olemassa pisteet P_i suorilla t_i, $i = 1, \ldots, k$ joilla P_{i+1} on pisteen P_i projektio suoralla t_{i+1}, kun $1 = 1, \ldots, k-1$ ja P_1 on pisteen P_k projektio suoralla t_1.

14. Kuperassa eli konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\angle ADC = 90^o$. Olkoot E ja F pisteen B projektioita suorille AD ja AC tässä järjestyksessä. Oletetaan, että F on pisteiden A ja C välissä, että A on pisteiden D ja E välissä ja että suora EF kulkee janan BD keskipisteen kautta. Osoita, että nelikulmion $ABCD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä.

15. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivua AC pisteessä D. Toinen ympyrä kulkee pisteen D kautta ja sivuaa suoria BC ja BA, jälkimmäistä pisteessä A. Määritä suhde AD/DC.

16. Olkoot a ja b rationaalilukuja, joilla $s = a + b = a^2 + b^2$. Osoita, että s voidaan esittää rationaalilukuna jonka nimittäjällä ei ole yhteisiä tekijöitä luvun 6 kanssa.

17. Olkoot x, y, z positiivisia kokonaislukuja, joilla $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{z} + \dfrac{z+1}{x}$ on kokonaisluku. Olkoon d lukujen x, y ja z suurin yhteinen tekijä. Osoita, että $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Olkoot a, b, c, d nollasta poikkeavia kokonaislukuja, joilla ainoa yhtälön

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

toteuttava kokonaislukunelikkö (x, y, z, t) on $x = y = z = t = 0$. Seuraako tästä, että luvut a, b, c ja d ovat samanmerkkisiä?

19. Olkoot r ja k positiivisia kokonaislukuja, ja olkoot luvun r kaikki alkutekijät suurempia kuin 50. Kutsumme positiivista kokonaislukua, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä on vähintään k numeroa (ilman edessä olevia nollia) *kieroutuneeksi*, jos jokainen k peräkkäisen numeron jono muodostaa luvun (jossa on mahdollisesti alussa nollia), joka on luvun r monikerta. Osoita, että jos on olemassa äärettömän monta kieroutunutta lukua, niin $10^k - 1$ on kieroutunut.

20. Olkoot a ja b, positiivisia kokonaislukuja, joille $b < a$ ja luku $a^3 + b^3 + ab$ on jaollinen luvulla $ab(a-b)$. Osoita, että ab on kokonaisluvun kuutio.