Baltian tie 2008

Gdańsk, 8. marraskuuta 2008

Finnish

Sallittu aika: 4,5 tuntia.
Jokainen ongelma on 5 pisteen arvoinen.

Ongelma 1. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $p(x)$, joilla

$$p\left((x+1)^3\right) = (p(x)+1)^3$$

ja $p(0) = 0$.

Ongelma 2. Osoita, että jos reaaliluvut a, b ja c toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, niin

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Milloin yhtäsuuruus pätee?

Ongelma 3. Onko olemassa sellainen kulma $\alpha \in]0, \pi/2[$, että $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ ovat jossakin järjestyksessä aritmeettisen jonon peräkkäisiä termejä?

Ongelma 4. Polynomin P kertoimet ovat kokonaislukuja, ja $P(x) = 5$ viidellä eri kokonaisluvulla x. Osoita, ettei millään kokonaisluvulla x voi olla $-6 \leq P(x) \leq 4$ tai $6 \leq P(x) \leq 16$.

Ongelma 5. Romeolla ja Julialla on kummallakin säännöllinen tetraedri, joiden kussakin kärjessä on positiivinen reaaliluku. He liittävät jokaiseen särmään sen kahden kärjen lukujen tulon. Sitten he kirjoittavat jokaiselle tahkolle sen kolmen särmän lukujen summan. Romeon tetraedrin tahkoille kirjoitetut neljä lukua osoittautuvat samoiksi kuin Julian tetraedrin tahkoille kirjoitetut neljä lukua. Seuraako tästä, että Romeon tetraedrin kärkien neljä lukua ovat samat kuin Julian tetraedrin kärkien neljä lukua?

Ongelma 6. Etsi kaikki äärelliset positiivisten kokonaislukujen joukot, joissa on vähintään kaksi alkiota ja jotka toteuttavat seuraavan ehdon: jos kaksi lukua a ja b ($a > b$) kuuluvat joukkoon, niin myös $\frac{b^2}{a-b}$ kuuluu joukkoon.

Ongelma 7. Kuinka moni positiivisten kokonaislukujen pari (m, n), jossa $m < n$, toteuttaa yhtälön

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\ ?$$

Ongelma 8. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen joukkoa A, jonka pienin alkio on 1001 ja jonka kaikkien alkioiden tulo on kokonaisluvun neliö. Mikä on pienin mahdollinen joukon A suurimman alkion arvo?

Ongelma 9. Positiiviset kokonaisluvut a ja b toteuttavat yhtälön

$$a^b - b^a = 1008.$$

Osoita, että a ja b ovat kongruentteja keskenään modulo 1008.

Ongelma 10. Olkoon $S(n)$ positiivisen kokonaisluvun n numeroiden summa. Määritä lausekkeen $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$ suurin mahdollinen arvo.

Ongelma 11. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, 169\}$ osajoukkoa A, jossa on 84 alkiota ja jonka minkään kahden alkion summa ei ole 169. Osoita, että A sisältää kokonaisluvun neliön.

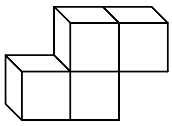
Ongelma 12. Koululuokalla on $3n$ lasta. Jokaiset kaksi lasta tekevät yhteisen lahjan täsmälleen yhdelle muulle lapselle. Osoita, että kaikilla parittomilla n seuraava tilanne on mahdollinen: jokaisella kolmen lapsen A, B ja C ryhmällä pätee, että jos A ja B tekevät lahjan C:lle, niin A ja C tekevät lahjan B:lle.

Ongelma 13. Tulevaa kansainvälistä matematiikkakilpailua varten osallistujamaita pyydettiin valitsemaan yhdeksästä kombinatoriikan ongelmasta omat suosikit kilpailutehtäviksi. Ottaen huomioon kuinka hankalaa yksimielisyyteen pääseminen yleensä on, kukaan ei ollut yllättynyt, kun kävi näin:

- Jokainen maa äänesti täsmälleen kolmea tehtävää.
- Jokaiset kaksi maata äänestivät eri tehtäväjoukkoja.
- Millä tahansa kolmella maalla on jokin tehtävä, jota mikään maista ei äänestänyt.

Mikä on suurin mahdollinen osallistujamaiden lukumäärä?

Ongelma 14. Onko mahdollista rakentaa $4\times4\times4$ -kuutio kuvan mukaisista, neljästä yksikkökuutiosta koostuvista palikoista?



Ongelma 15. $n \times n$ -ruudukolle asetetaan kaksi vierekkäistä ruutua peittäviä 1×2 -dominoita siten, että ne eivät koske toisiinsa (edes kulmissa) ja että niiden peittämä ala on 2008. Etsi pienin n, jolla tämä onnistuu.

Ongelma 16. Olkoon $ABCD$ suunnikas. Ympyrä, jonka halkaisija on AC, leikkaa suoran BD pisteissä P ja Q. Pisteen C kautta piirretty suoran AC kohtisuora leikkaa suorat AB ja AD pisteissä X ja Y. Osoita, että pisteet P, Q, X ja Y ovat samalla ympyrällä.

Ongelma 17. Olkoot a, b, c ja d annetun ympyrän sisään piirretyn nelikulmion sivut. Osoita, että tulo $(ab + cd)\,(ac + bd)\,(ad + bc)$ saavuttaa maksiminsa kun nelikulmio on neliö.

Ongelma 18. Olkoon AB ympyrän S halkaisija ja L pisteeseen A piirretty tangentti. Olkoon lisäksi c kiinnitetty positiivinen reaaliluku. Tarkastellaan kaikkia suoran L pistepareja X ja Y, jotka sijaitsevat pisteen A eri puolilla, niin että $|AX| \cdot |AY| = c$. Suorat BX ja BY leikkaavat ympyrän S pisteissä P ja Q. Osoita, että kaikki tällaiset suorat PQ kulkevat yhteisen pisteen kautta.

Ongelma 19. Ykköshalkaisijaisen ympyrän sisään piirretään jänteitä. Niiden pituuksien summa on yli 19. Osoita, että ympyrällä on halkaisija, joka leikkaa ainakin seitsemää jännettä.

Ongelma 20. Olkoon piste M janalla BC ja piste N janalla AB, niin että AM ja CN ovat kolmion ABC kulmanpuolittajia. Lisäksi

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}.$$

Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen.