42. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset
Washington, DC, USA

Ensimmäinen päivä – 8. heinäkuuta 2001
9.00 – 13.30

1. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. A:sta BC:lle piirretyn korkeusjanan kantapiste on P.

Oletetaan, että $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

Todista, että $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

2. Todista, että

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b ja c.

3. Matematiikkakilpailuun osallistui 21 tyttöä ja 21 poikaa.

- Jokainen kilpailija ratkaisi enintään kuusi tehtävää.
- Jokaista tyttöä ja poikaa kohden oli ainakin yksi tehtävä, jonka molemmat ratkaisivat.

Todista, että oli ainakin yksi tehtävä, jonka ratkaisi ainakin kolme tyttöä ja ainakin kolme poikaa.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on seitsemän.

42. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset

Washington, DC, USA

Toinen päivä – 9. heinäkuuta 2001

9.00 – 13.30

4. Olkoon n pariton kokonaisluku, $n > 1$, ja olkoot $k_1, k_2, \ldots, k_n$ annettuja kokonaislukuja. Olkoon jokaiselle joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ $n!$:lle permutaatiolle $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Osoita, että on olemassa ainakin kaksi permutaatiota b ja c, $b \neq c$, siten, että $S(b) - S(c)$ on jaollinen $n!$:lla.

5. Olkoon kolmiossa ABC kulman BAC puolittaja AP, missä P on sivulla BC, ja olkoon kulman ABC puolittaja BQ, missä Q on sivulla CA.

Tiedetään, että $\angle BAC = 60°$ ja että $AB + BP = AQ + QB$.

Mitkä ovat kolmion ABC mahdolliset kulmat?

6. Olkoot a, b, c ja d kokonaislukuja ja $a > b > c > d > 0$. Oletetaan, että

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Osoita, että $ab + cd$ ei ole alkuluku.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on seitsemän.