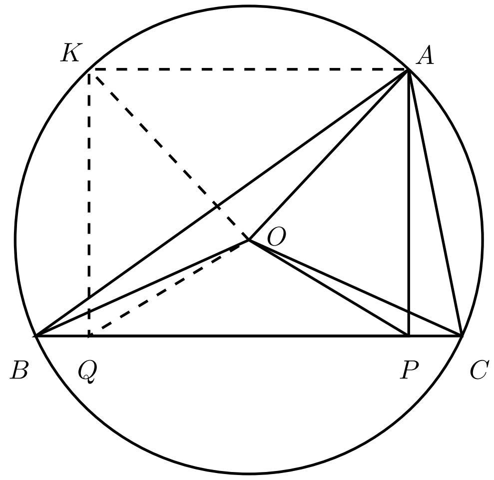
42. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset
1.–14. 7. 2001, Washington, DC, Yhdysvallat
Tehtävien malliratkaisuja

1. *Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. A:sta BC:lle piirretyn korkeusjanan kantapiste on P.*

Oletetaan, että $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

Todista, että $\angle CAB + \angle COP < 90°$.



Merkitään $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$ ja $\delta = \angle COP$. Olkoot K ja Q pisteiden A ja P kuvapisteet peilauksessa janan BC keskinormaalin suhteen. Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde R. Nyt $OA = OB = OC = OK = R$. Koska $KQPA$ on suorakulmio, $QP = KA$. Havaitaan, että $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = \angle AOB - \angle AOC = 2\gamma - 2\beta \geq 60°$. Tästä seuraa, että $KA \geq R$ ja $QP \geq R$. Käytetään kolmioepäyhtälöä: $OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geq R + PC$. Siis $OP > PC$, joten $\angle PCO > \delta$ kolmiossa COP. Väite $\alpha + \delta < 90°$ seuraa, sillä $\alpha = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - 2\angle PCO) = 90° - \angle PCO$. $\square$

2. *Todista, että*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b ja c.

Jakamalla todistettava epäyhtälö puolittain luvulla $abc = 1$ saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+8x_2}} + \frac{1}{\sqrt{1+8x_3}} \geq 1,$$

missä myös uusille muuttujille pätee $x_1, x_2, x_3 > 0$ ja $x_1x_2x_3 = 1$. Kertomalla puolittain luvulla $\sqrt{1+8x_1}\sqrt{1+8x_2}\sqrt{1+8x_3}$ saadaan edelleen yhtäpitävästi

$$\sum_{i=1}^{3} \sqrt{1+8x_{i+1}}\sqrt{1+8x_{i+2}} \geq \prod_{i=1}^{3} \sqrt{1+8x_i},$$

missä indeksit on ymmärrettävä modulo 3. Korottamalla puolittain neliöön saadaan yhtäpitävästi (koska molemmat puolet ovat positiivisia)

$$\sum_{i=1}^{3}(1+8x_{i+1})(1+8x_{i+2}) + 2\sum_{i=1}^{3}(1+8x_i)\sqrt{1+8x_{i+1}}\sqrt{1+8x_{i+2}} \geq \prod_{i=1}^{3}(1+8x_i).$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella $(1+8x_i)/9 \geq (1 \cdot x_i^8)^{1/9} = x_i^{8/9}$, joten toista summattavaa voidaan arvioida alaspäin:

$$(1+8x_i)\sqrt{1+8x_{i+1}}\sqrt{1+8x_{i+2}} \geq 9x_i^{8/9} \cdot \sqrt{9x_{i+1}^{8/9} \cdot 9x_{i+2}^{8/9}} = 81x_i^{4/9}.$$

Riittää siis todistaa

$$3 + 16\sum_{i=1}^{3} x_i + 64\sum_{i=1}^{3} x_{i+1}x_{i+2} + 162\sum_{i=1}^{3} x_i^{4/9} \geq 1 + 8\sum_{i=1}^{3} x_i + 64\sum_{i=1}^{3} x_{i+1}x_{i+2} + 512$$

eli

$$8\sum_{i=1}^{3} x_i + 162\sum_{i=1}^{3} x_i^{4/9} \geq 510.$$

Koska $\prod_{i=1}^{3} x_i = 1$, aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä seuraa $\sum_{i=1}^{3} x_i \geq 3$ ja $\sum_{i=1}^{3} x_i^{4/9} \geq 3$. □

Tehtävän voi ratkaista myös todistamalla epäyhtälön

$$\left(a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}\right)^2 - \left(a^{4/3}\right)^2 \geq 2b^{2/3}c^{2/3} \cdot 4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3},$$

josta seuraa

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}}.$$

3. *Matematiikkakilpailuun osallistui 21 tyttöä ja 21 poikaa.*

- *Jokainen kilpailija ratkaisi enintään kuusi tehtävää.*
- *Jokaista tyttöä ja poikaa kohden oli ainakin yksi tehtävä, jonka molemmat ratkaisivat.*

Todista, että oli ainakin yksi tehtävä, jonka ratkaisi ainakin kolme tyttöä ja ainakin kolme poikaa.

Annetaan 21×21-ruudukon jokaisen rivin vastata yhtä poikaa ja jokaisen sarakkeen yhtä tyttöä. Kirjoitetaan rivin ja sarakkeen leikkausruutuun jonkin sellaisen tehtävän numero, jonka kyseiset tyttö ja poika ovat ratkaisseet. Tällainen tehtävä on olemassa toisen oletuksen nojalla. Väritetään punaiseksi jokainen sellainen ruutu, johon kirjoitettu numero esiintyy ainakin kolmessa saman rivin ruudussa. Jokaisessa rivissä on vähintään 11 punaista ruutua, joten kaikkiaan punaisia ruutuja on vähintään $11 \times 21 = 231$. Väritetään vastaavasti siniseksi jokainen sellainen ruutu, johon kirjoitettu numero esiintyy ainakin kolmessa saman sarakkeen ruudussa. Sinisiäkin ruutuja on vähintään 231, joten jotkin ruudut on väritetty kummallakin värillä. Jokaiseen tällaiseen ruutuun on kirjoitettu sellaisen tehtävän numero, jonka on ratkaissut vähintään kolme poikaa ja kolme tyttöä. □

4. *Olkoon n pariton kokonaisluku, $n > 1$, ja olkoot $k_1, k_2, \ldots, k_n$ annettuja kokonaislukuja. Olkoon jokaiselle joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ $n!$:lle permutaatiolle $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$*

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Osoita, että on olemassa ainakin kaksi permutaatiota b ja c, $b \neq c$, siten, että $S(b) - S(c)$ on jaollinen $n!$:lla.

Lasketaan $\sum S(a)$, lukujen $S(a)$ summa modulo $n!$ kaikille permutaatioille a, kahdella tavalla.

Ensimmäinen tapa. Summa $\sum S(a)$ sisältää luvun k_1 kerrottuna kullakin luvulla $j \in \{1, \ldots, n\}$ kaikkiaan $(n-1)!$ kertaa. Siis tässä summassa luvun k_1 kerroin on

$$(n-1)!\,(1 + 2 + \cdots + n) = (n+1)!/2.$$

Sama pätee kaikille k_i, joten

$$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{1}$$

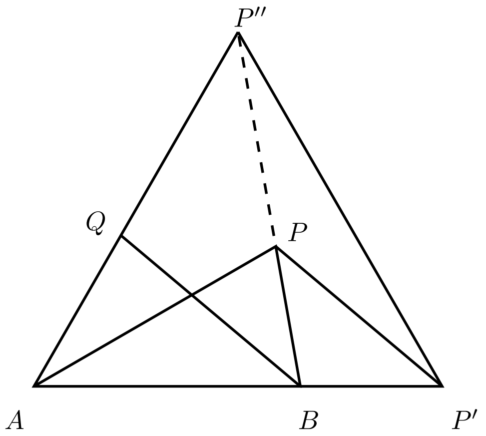
Toinen tapa. Oletetaan vastoin väitettä, että $n!$ ei jaa mitään erotusta $S(a) - S(b)$, $a \neq b$. Silloin luvuilla $S(a)$ on eri jäännökset modulo $n!$, ja koska permutaatioita on $n!$, näiden jäännösten on oltava täsmälleen $0, 1, 2, \ldots, n! - 1$. Siis

$$\sum S(a) \equiv \frac{(n! - 1)n!}{2} \pmod{n!}. \tag{2}$$

Yhdistämällä tulokset (1) ja (2) saadaan

$$\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!}. \tag{3}$$

Kun n on pariton, kongruenssin (3) vasen puoli on välttämättä $0 \pmod{n!}$, mutta kun $n > 1$, sen oikea puoli ei voi olla 0. Saatiin siis ristiriita. $\square$



5. *Olkoon kolmiossa ABC kulman BAC puolittaja AP, missä P on sivulla BC, ja olkoon kulman ABC puolittaja BQ, missä Q on sivulla CA.*

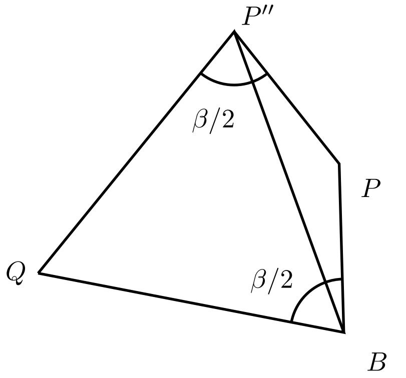
Tiedetään, että $\angle BAC = 60°$ ja että $AB + BP = AQ + QB$.

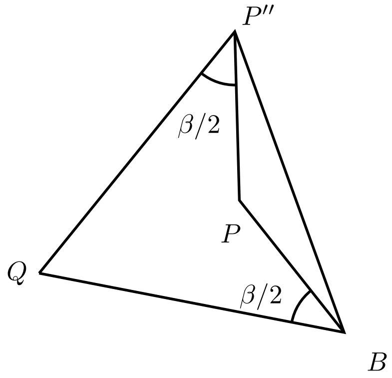
Mitkä ovat kolmion ABC mahdolliset kulmat?

Olkoot kolmion ABC kulmat $\alpha = 60°$, β ja γ. Jatketaan janaa AB pisteeseen P', jolle $BP' = BP$, ja valitaan suoralta AQ piste P'', jolle $AP'' = AP'$. Nyt $BP'P$ on tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat $\beta/2$. Koska $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, saadaan $QP'' = QB$. Koska kolmio $AP'P''$ on tasasivuinen ja AP on kulman $P'AP''$ puolittaja, $PP' = PP''$.

Väite. Pisteet B, P ja P'' ovat samalla suoralla, joten $P'' = C$.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että BPP'' on kolmio. Koska $\angle PBQ = \angle PP'B = \angle PP''Q = \beta/2$, tilanne on sellainen kuin jommassakummassa seuraavista kuvista. Kummassakin tapauksessa $BP = PP'' = PP'$, joten kolmio BPP' on tasasivuinen ja siis $\beta/2 = 60°$ eli $\beta = 120°$. Tällöin $\alpha + \beta = 180°$, mikä on ristiriita. Siis pisteet B, P ja P'' ovat samalla suoralla ja $P'' = C$.





Koska kolmio BCQ on tasakylkinen, $\gamma = \beta/2$ ja $60° + (3/2)\beta = 180°$, mistä voidaan ratkaista $\beta = 80°$ ja $\gamma = 40°$.

6. *Olkoot a, b, c ja d kokonaislukuja ja $a > b > c > d > 0$. Oletetaan, että*

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Osoita, että $ab + cd$ ei ole alkuluku.

Suurimman yhteisen tekijän tunnettujen ominaisuuksien perusteella $ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = m \cdot \mathrm{syt}(a + d, b - c)$ jollain kokonaisluvulla m. Oletetaan vastoin väitettä, että $ab + cd$ on alkuluku. Silloin joko $m = 1$ tai $\mathrm{syt}(a + d, b - c) = 1$.

Jos $m = 1$, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{syt}(a + d, b - c) &= ab + cd \\ &> ab + cd - (a - b + c + d) \\ &= (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) \\ &\geq \mathrm{syt}(a + d, b - c),\end{aligned}$$

mikä on ristiriita, joten $\mathrm{syt}(a + d, b - c) = 1$. Tehtävän oletuksesta saadaan $(b + d + a - c)(b + d - a + c) = ac + bd = (a + d)b - (b - c)a$ ja siis

$$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d).$$

On siis olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolle

$$\begin{aligned} a - c - d &= k(b - c), \\ b + c + d &= k(a + d).\end{aligned}$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $a + b = k(a + d - c + d)$, mistä seuraa $k(c - d) = (k - 1)(a + b)$. Jos $k = 1$, niin $c = d$, mikä on ristiriita. Jos $k \geq 2$, niin

$$2 \geq \frac{k}{k - 1} = \frac{a + b}{c - d} > 2,$$

mikä on jälleen ristiriita. (Tässä tarvittiin oletusta $a > b > c > d$.) □

Toinen mahdollinen ratkaisu perustuu havaintoon

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc).$$

Tehtävän ehdot täyttäviä lukunelikoita (a, b, c, d) ovat esimerkiksi $(21, 18, 14, 1)$ ja $(65, 50, 34, 11)$.