Ensimmäinen päivä: 24. 7. 2002

Kesto: 4 tuntia 30 minuuttia.
Kustakin tehtävästä voi saada korkeintaan 7 pistettä.

Version: Finnish

Tehtävä 1

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Olkoon T niiden tason pisteiden (x, y) joukko, joille x ja y ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja $x + y < n$. Jokainen joukon T piste väritetään punaiseksi tai siniseksi. Jos piste (x, y) on punainen, niin on myös jokainen piste $(x', y') \in T$, missä $x' \leq x$ ja $y' \leq y$. Kutsutaan X-joukoksi joukkoa, joka koostuu n sinisestä pisteestä, joilla on eri x-koordinaatit, sekä Y-joukoksi joukkoa, joka koostuu n sinisestä pisteestä, joilla on eri y-koordinaatit. Todista, että X-joukkoja on yhtä monta kuin Y-joukkoja.

Tehtävä 2

Olkoon BC O-keskisen ympyrän Γ halkaisija. Olkoon A ympyrän Γ piirin piste, jolle $0° < \measuredangle AOB < 120°$. Olkoon D pistettä C sisältämättömän kaaren AB keskipiste. Pisteen O kautta kulkeva, janan DA kanssa yhdensuuntainen suora leikkaa suoran AC pisteessä J. Janan OA keskinormaali leikkaa ympyrän Γ piirin pisteissä E ja F. Todista, että J on kolmion CEF sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste.

Tehtävä 3

Etsi kaikki kokonaislukuparit (m, n), $m, n \geq 3$, joille on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua a, että

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

on kokonaisluku.

Toinen päivä: 25. 7. 2002

Kesto: 4 tuntia 30 minuuttia.
Kustakin tehtävästä voi saada korkeintaan 7 pistettä.

Version: Finnish

Tehtävä 4

Olkoon n lukua 1 suurempi kokonaisluku. Luvun n positiiviset tekijät ovat $d_1, d_2, \ldots, d_k$, missä

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Merkitään $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$.

a) Todista, että $D < n^2$.

b) Määritä kaikki luvut n, joille D on luvun n^2 tekijä.

Tehtävä 5

Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee kaikilla $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Tehtävä 6

Olkoot $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ tason yksikkösäteisiä ympyröitä, missä $n \geq 3$. Olkoot näiden keskipisteet $O_1, \ldots, O_n$. Oletetaan, että mikään suora ei kohtaa useampaa kuin kahta ympyröistä. Todista, että

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$