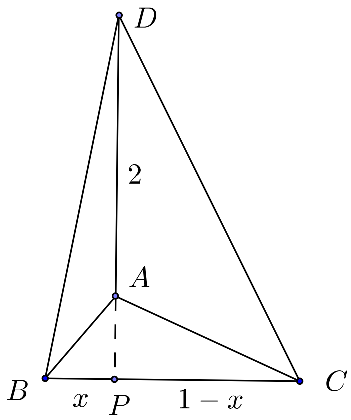
Lukion matematiikkakilpailu 30.1.1998

Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että pisteet A, B, C ja D voidaan sijoittaa tasoon niin, että nelikulmion $ABCD$ pinta-ala on kaksi kertaa niin suuri kuin nelikulmion $ADBC$.*

Ratkaisu. Sijoitetaan B ja C niin, että $BC = 1$. Olkoon P sellainen BC:n piste, että $BP = x$. Piirretään P:n kautta BC:n normaali, ja valitaan siltä pisteet A ja D niin, että $AP = 1$ ja $AD = 2$. Merkitään kuvion $\mathcal{F}$ alaa $|\mathcal{F}|$. Nyt $|ABC| = \dfrac{1}{2}$, $|ADB| = x$ ja $|ACD| = 1 - x$. Koska $|ABCD| = |ABC| + |ACD| = \dfrac{1}{2} + 1 - x$ ja $|ADBC| = |ADB| + |ABC| = x + \dfrac{1}{2}$, tehtävän ehto toteutuu, kun



$$\frac{3}{2} - x = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

eli kun $x = \dfrac{1}{6}$.

2. *Kilpailutoimikunnassa on 11 jäsentä. Kilpailutehtäviä säilytetään hyvässä tallessa lukkojen takana. Avaimia on jaeltu toimikunnan jäsenille niin, että ketkä tahansakuusi jäsentä voivat avata lukot, mutta ketkään viisi eivät riitä niiden avaamiseen. Kuinka monta lukkoa tarvitaan vähintään, ja kuinka monta avainta tällöin on kullakin toimikunnan jäsenellä?*

Ratkaisu. Toimikunnasta voidaan valita $\binom{11}{5} = 462$ erilaista viiden joukkoa. Kutakin tällaista joukkoa kohden on oltava lukko, johon kenekään joukon jäsenen avain ei sovi. Koska kahdella eri viiden joukolla on aina mahdollisuus yhdessä avata kaikki lukot, on eri viiden joukkoja kohden oltava eri lukko, jota joukon jäsenet eivät saa auki. Lukkoja on oltava ainakin 462. Jokaisella toimikunnan jäsenellä J on oltava avain jokaiseen sellaiseen lukkoon, jota sellainen viiden joukko, johon J ei kuulu, ei pysty avaamaan. Viiden joukkoja, joihin J ei kuulu, on $\binom{10}{5} = 252$ kappaletta. Jokaisella jäsenellä on oltava ainakin 252 avainta. On vielä osoitettava, että lukumäärät ovat riittäviä. Hankitaan siis 462 lukkoa, nimetään ne toimikunnan viisijäsenisten osajoukkojen mukaan ja jaetaan avaimet niin, että jokainen jäsen saa avaimen kaikkiin niihin 252 lukkoon, jotka liittyvät sellaisiin viiden jäsenen joukkoihin, joihin kyseinen jäsen ei kuulu. Silloin yksikään viiden jäsenen joukko ei voi avata kaikkia lukkoja. Olkoon sitten $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ mielivaltainen kuuden jäsenen joukko. Jokainen lukko liittyy johonkin viiden jäsenen joukkoon S'.

Mutta koska S:ssä on aina jokin S':uun kuulumaton jäsen, S:n jäsenet pystyvät avaamaan jokaisen tällaisen lukon.

3. *Voiko jonosta* $1/2$, $1/4$, $1/8$, … *valita geometrisen, päättyvän tai päättymättömän, jonon, jonka peräkkäisten jäsenten suhde ei ole* 1 *ja jonka summa on* $1/5$*?*

Ratkaisu. Jos tällainen jono olisi olemassa, sen suurin termi ei olisi $\frac{1}{2}$ eikä $\frac{1}{4}$. Koska

$$\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{8}<\frac{1}{5},$$

jonon suurin termi ei voi olla $\le \frac{1}{16}$. Jonon suurin termi voi olla vain $\frac{1}{8}$. Nyt

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{4}>\frac{1}{5},$$

mutta

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{6}<\frac{1}{5}.$$

Tästä seuraa, että minkään tehtävän mukaisen päättymättömän geometrisen sarjan summa ei voi olla $\frac{1}{5}$ ja että sellaisen jonon, jonka toinen termi on pienempi kuin $\frac{1}{16}$ summa ei voi olla $\frac{1}{5}$. Mutta

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{8}\frac{2^{p+1}-1}{2^p}.$$

Jotta tällainen murtoluku supistuisi luvuksi $\frac{1}{5}$, sen nimittäjässä olisi oltava tekijänä 5. Koska näin ei ole, tehtävän kysymyksen vastaukseksi tulee, että vaaditunlaista jonoa ei ole olemassa.

4. *Neliössä, jonka sivu on* 1, *on* 110 *pistettä. Osoita, että jotkin neljä näistä sijaitsevat ympyrässä, jonka säde on* $1/8$.

Ratkaisu. Ympyrään, jonka säde on $\frac{1}{8}$, voidaan piirtää neliö, jonka sivu on $\frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{4\cdot 1{,}5}=\frac{1}{6}$. Oletetaan, että jokaisessa $\frac{1}{8}$-säteisessä ympyrässä olisi enintään kolme annetuista pisteistä. Silloin missään $\frac{1}{6}$-sivuisessa neliössä ei olisi kuin enintään kolme annetuista pisteistä. Mutta 1-sivuinen neliö voidaan jakaa 6×6:ksi eli 36:ksi $\frac{1}{6}$-sivuiseksi neliöksi. Pisteitä voisi siis olla enintään $36\cdot 3=108$ kappaletta. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

5. 15×36-*ruudukkoa peitetään neliölaatoilla. Neliölaattoja on kahdenkokoisia; sivun pituus voi olla* 7 *tai* 5. *Laattojen tulee peittää täysiä yksikköneliöitä, eivätkä ne saa mennä päällekkäin. Kuinka monta ruutua laatat voivat peittää?*

Ratkaisu. Ruutuja on kaikkiaan $15 \cdot 35 = 540$. Peitettyjen ruutujen määrä on $a \cdot 49 + b \cdot 25 = (2a + b) \cdot 25 - a$, missä $a \geq 0$ ja $b \geq 0$. Peittämättömien ruutujen määrä on siis $540 - (2a + b) \cdot 25 + a \geq 540 - 525 + a = 15 + a \geq 15$. Kun $a = 0$ ja $b = 21$, voidaan laatat helposti asetella niin, että tehtävän mukainen peitto syntyy. Ruutuja voi peittää enintään 525 kappaletta.