Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut

6. 2. 2009

1. *Erään tason pisteiden lämpötila riippuu pisteestä niin, että pisteen* (x, y) *lämpötila on* $x^2 + y^2 - 6x + 4y$. *Määritä tason kylmin piste ja sen lämpötila.*

Ratkaisu: Koska

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 13 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 13,$$

kaikkien pisteiden lämpötila on vähintään -13 ja lämpötila pisteessä $(3, -2)$ ja vain siinä on tasan -13.

2. *Polynomin* P *kertoimet ovat kokonaislukuja ja pätee* $P(3) = 4$ *ja* $P(4) = 3$. *Kuinka monelle kokonaisluvulle* x *voi olla* $P(x) = x$?

Ratkaisu: Olkoon $Q(x) = P(x) - x$. Silloin $Q(3) = 4 - 3 = 1$ ja $Q(4) = 3 - 4 = -1$. Oletetaan, että $Q(x_0) = 0$. Silloin $Q(x) = (x - x_0)Q_1(x)$ ja $Q_1(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. [Kertoimien ominaisuus on helppo nähdä, kun kirjoittaa jakoyhtälön auki.] Silloin $(3 - x_0)Q_1(3) = 1$ ja $(4 - x_1)Q_1(4) = -1$. Lukujen $|3 - x_0|$, ja $|4 - x_0|$ tulisi molempien olla ykkösiä, mikä on selvästi mahdotonta. (Jos $|3 - x_0| = 1$, niin $x_0 = 2$ tai $x_0 = 4$; tällöin $|4 - x_0|$ on joko 2 tai 0. Kokonaislukuja x, joille $P(x) = x$, ei siis ole olemassa.

3. *Ympyrät* $\mathcal{Y}_0$ *ja* $\mathcal{Y}_1$ *sijaitsevat toistensa ulkopuolella. Ympyrän* $\mathcal{Y}_0$ *keskipisteestä* O_0 *piirretään ympyrää* $\mathcal{Y}_1$ *sivuavat puolisuorat, ja ympyrän* $\mathcal{Y}_1$ *keskipisteestä* O_1 *vastaavasti ympyrää* $\mathcal{Y}_0$ *sivuavat puolisuorat. Puolisuorat leikkaavat ympyrän* $\mathcal{Y}_i$ *pisteissä* A_i *ja* B_i. *Osoita, että janat* A_0B_0 *ja* A_1B_1 *ovat yhtä pitkät.*

Ratkaisu: Seuraavassa $i = 0$ tai $i = 1$. Olkoon O_i $\mathcal{Y}_i$:n keskipiste ja sivutkoot O_i:stä piirretyt $\mathcal{Y}_{1-i}$:n tangentit $\mathcal{Y}_{1-i}$:tä pisteissä C_{1-i} ja D_{i-1} (niin että O_i, A_i ja C_{1-i} ovat samalla suoralla). Olkoon E_i A_iB_i:n ja O_0O_1:n leikkauspiste. Koska O_0O_1 puolittaa kulman $C_{1-i}O_iD_{1-i}$ ja $O_iA_i = O_iB_i$, niin A_iB_i on kohtisuorassa O_0O_1:tä vastaan. Tangetti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä ympyrä sädettä vastaan. Tämä merkitsee, että $O_iO_{1-i}C_{i-1}$ ja $O_iA_iE_i$ ovat yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita. Siis

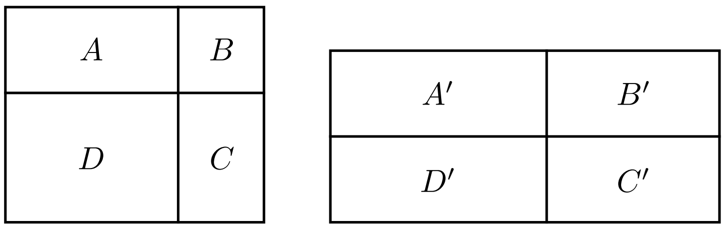
$$\frac{A_iE_i}{O_iA_i} = \frac{O_{1-i}C_{1-i}}{O_iO_{1-i}}.$$

Mutta koska $O_iA_i = O_iC_i$, saadaan

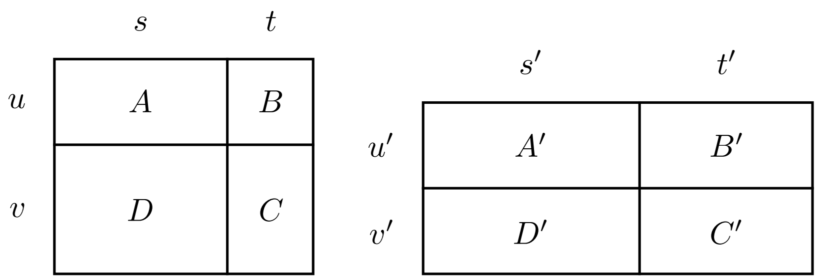
$$A_iE_i = \frac{O_iC_i \cdot O_{1-i}C_{1-i}}{O_iO_{1-i}}.$$

Siis $A_0E_0 = A_1E_1$ joten myös $A_0B_0 = A_1B_1$. $\square$

4. *Oheisessa kuviossa vasemmanpuoleinen suorakaide on jaettu sivujen suuntaisilla janoilla neljään osaan, joiden alat ovat A, B, C ja D, sekä oikeanpuoleinen suorakaide vastaavalla tavalla osiin, joiden alat ovat A', B', C' ja D'. Tiedetään, että $A \leq A'$, $B \leq B'$, $C \leq C'$ mutta $D \leq B'$. Todista, että vasemmanpuoleisen suorakaiteen ala on pienempi tai yhtä suuri kuin oikeanpuoleisen eli $A + B + C + D \leq A' + B' + C' + D'$.*



Ratkaisu: Merkitään sivuja seuraavan kaavion mukaisesti:



Merkitään lisäksi $S = A+B+C+D$ ja $S' = A'+B'+C'+D'$. Ensiksi havaitaan, että $B'D' = (t'u')(s'v') = (s'u')(t'v') = A'C' \geq AC = (su)(tv) = (tu)(sv) = BD$. Toisaalta oletuksista seuraa myös $B' - B \geq 0$ ja $B' - D \geq 0$, joten $(B' - B)(B' - D) \geq 0$ eli $(B')^2 - B'D - BB' + BD \geq 0$. Yhdistämällä huomiot saadaan

$$\begin{aligned} B'(B' - B + D' - D) &= (B')^2 - B'D' - BB' + B'D' \\ &\geq (B')^2 - B'D' - BB' + BD, \end{aligned}$$

joten koska $B' > 0$, saadaan $B' - B + D' - D \geq 0$. Siis

$$S' - S = (A' - A) + (B' - B + D' - D) + (C' - C) \geq 0$$

eli $A' + B' + C' + D' = S' \geq S = A + B + C + D$. $\square$

5. *Kutsutaan askelpituuksien joukkoa $D \subset \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ loistavaksi, jos sillä on seuraava ominaisuus:*

Aina kun kokonaislukujen joukko ositetaan kahteen osaan A ja $\mathbb{Z} \setminus A$, niin ainakin toinen osista sisältää alkiot $a-d, a, a+d$ (eli $\{a-d, a, a+d\} \subset A$ tai $\{a-d, a, a+d\} \subset \mathbb{Z} \setminus A$) joillakin luvuilla $a \in \mathbb{Z}$, $d \in D$.

Esimerkiksi yhden alkion joukko $\{1\}$ ei ole loistava, sillä kokonaislukujen joukon voi osittaa parillisiin ja parittomiin lukuihin, eikä kumpikaan näistä osista sisällä kolmea peräkkäistä lukua.

Osoita, että $\{1, 2, 3, 4\}$ on loistava mutta mikään sen aito osajoukko ei ole.

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $\{1, 2, 3, 4\}$ on loistava. Olkoon $A \subset \mathbb{Z}$. Jos kaikilla $a \in \mathbb{Z}$ alkiot a ja $a+2$ ovat eri osissa A ja $\mathbb{Z} \setminus A$, niin alkiot -4, 0 ja 4 ovat samassa osassa. Oletetaan siis, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{Z}$, että a ja $a+2$ ovat samassa osassa. Tilanteen symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että $a, a+2 \in A$.

Jos $a+1 \in A$, niin $\{a, a+1, a+2\} \subset A$ on etsitynlainen kolmikko. Oletetaan siis, että $a+1 \notin A$. Jos $a-2 \in A$ tai $a+4 \in A$, niin $\{a-2, a, a+2\} \subset A$ tai $\{a, a+2, a+4\} \subset A$ on askelpituutta 2 vastaava etsitynlainen kolmikko. Mutta muuten $a-2, a+4 \notin A$ ja $\{a-2, a+1, a+4\} \subset \mathbb{Z} \setminus A$. Siis $\{1, 2, 3, 4\}$ on loistava.

Osoitetaan sitten, ettei mikään joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ aito osajoukko ole loistava. Selvästi riittää osoittaa, että mikään kolmialkioinen osajoukko ei ole loistava. Merkitään $k\mathbb{Z} = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid k \mid n \,\}$, kun $k \in \mathbb{Z}$, ja $A + B = \{\, a + b \mid a \in A, b \in B \,\}$, kun $A, B \subset \mathbb{Z}$. Valitaan joukot

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{0, 1, 2, 3\} + 8\mathbb{Z}, \\
A_2 &= \{0, 2, 4\} + 7\mathbb{Z}, \\
A_3 &= 3\mathbb{Z}, \\
A_4 &= \{0, 1\} + 4\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Tällöin jokaisella $k = 1, 2, 3, 4$ ositus $\{A_k, \mathbb{Z} \setminus A_k\}$ osoittaa, että $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{k\}$ ei ole loistava. $\square$