28. 10.

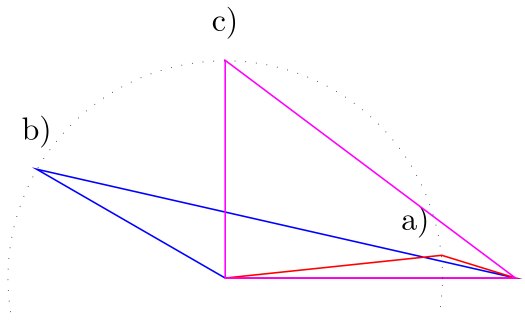
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

2010

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	+	+	+	−
2.	+	+	+	+
3.	−	−	−	−
4.	−	−	−	+
5.	−	+	+	+
6.	+	+	−	−

P1. Valitaan kannaksi sivu, jonka pituus on 4. Koska toinen jäljelle jäävistä sivuista on pituudeltaan 3 ja toista ei tunneta, korkeudelle pätee $0 < h \le 3$ ja kaikki nämä arvot ovat mahdollisia. Siis $0 < A = 4h/2 = 2h \le 6$ ja ala saa eri tilanteissa kaikki nämä arvot. Kohdat a, b ja c ovat siis oikein ja d väärin, vastaavat esimerkit ovat kuvassa.



P2. $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x^3+x^2+x+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1) = (x+1)(x^3-x^2+x-1)$, joten kaikki kohdat ovat oikein.

P3. Lieriön tilavuus on $\pi r^2 h = 1$ ja kokonaispinta-ala $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12$, joten

$$\frac{12}{1} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{\pi r^2 h} = \frac{2}{h} + \frac{2}{r},$$

mistä seuraa $1/r + 1/h = 6$. Siis mikään vaihtoehdoista ei ole oikein.

P4. Luku $2010 \cdot 2 = 4020$ ei ole kokonaisluvun neliö, sillä $63^2 = 3969 < 4020 < 64^2 = 4096$. Jos p on pariton alkuluku, niin $2010p = 2 \cdot 1005 \cdot p$ on parillinen, mutta ei jaollinen neljällä, koska $1005p$ on pariton. Siis $2010p$ ei silloinkaan ole kokonaisluvun neliö. Kohta d on siis oikein.

P5. Paritonta astetta olevalla polynomiyhtälöllä tunnetusti on ratkaisuja, joten a on väärin. Muut kohdat ovat mahdollisia, esimerkiksi yhtälöllä $x^3 = 0 \iff x = 0$ on yksi, yhtälöllä $x^3 - x^2 = 0 \iff x = 0 \lor x = 1$ kaksi ja yhtälöllä $x^3 - x = 0 \iff x = -1 \lor x = 0 \lor x = 1$ kolme ratkaisua.

P6. Merkitään $s = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$. Huomataan, että

$$\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{jos } x > 0 \\ -1 & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Siis lausekkeen

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$$

arvo voi olla -3, -1, 1 tai 3 sen mukaan, mitä lukujen x, y ja z etumerkit ovat. Toisaalta

$$\frac{xyz}{|xyz|} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \frac{z}{|z|}.$$

Jos siis $x, y, z > 0$, niin $s = 1+1+1+1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, jos $x, y, z < 0$, niin $s = -1+-1+-1+-1 = -4$. Jos täsmälleen kaksi luvuista x, y ja z on positiivisia, niin $s = 1+1 \cdot 1 \cdot -1 = 0$. Jos täsmälleen yksi on positiivinen, niin samoin $s = -1+1 \cdot -1 \cdot -1 = 0$. Siis mahdollisia arvoja on kolme, joten kohdat a ja b ovat oikein, c ja d vääriä.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Olkoot särmien pituudet a, b ja c. Suorakulmaisessa särmiössä tahkojen pinta-alat ovat tällöin ab, ac ja bc ja tilavuus $V = abc$. Siis

$$V^2 = (abc)^2 = (ab)(ac)(bc) = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576 = 24^2,$$

joten $V = 24$.

P8. Olkoon nelinumeroinen luku $1000a+100b+10c+d$, jossa a, b, c ja d ovat numeroita. Tiedetään, että

$$\begin{cases} a+b+c+d = 16 \\ c = a+b \\ b = 2d \\ (1000a+100b+10c+d) - (1000d+100c+10b+a) = 729. \end{cases}$$

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$16 = a + b + c + d = a + 2d + (a + 2d) + d = 2a + 5d.$$

Erityisesti $5d \leq 16$, joten $d \leq 3$. Kuitenkin jos d on pariton, myös $2a + 5d$ on, mutta numeroiden summa 16 on parillinen. Siis $d = 0$ tai $d = 2$. Edellisessä tapauksessa saadaan $a = \frac{1}{2}(16 - 5d) = 8$, $b = 2d = 0$, $c = a + b = 8 + 0 = 8$ ja $d = 0$, mutta $8080 - 0808 = 7272 \neq 729$, joten neljäs ehto ei toteudu. Jälkimmäisessä tapauksessa $a = \frac{1}{2}(16-5d) = \frac{16-10}{2} = 3$, $b = 2d = 4$, $c = a+b = 7$ ja $d = 2$. Koska $3472-2743 = 729$, viimeinen ehto toteutuu. *Siis alkuperäinen luku on* 3472.

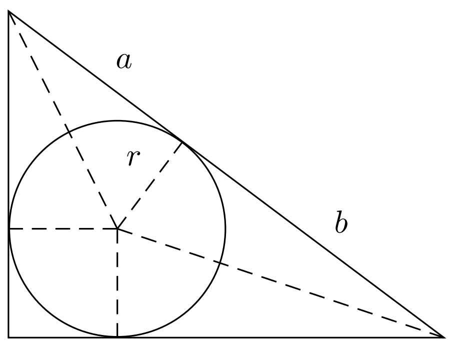
Huomautus: Neljän toisistaan riippumattoman lineaarisen yhtälön ryhmän voi tietenkin ratkaista myös tavanomaisin menetelmin käyttämättä oletusta tuntemattomien kokonaisuudesta.

Välisarja

V1. Matti maalasi aitaa klo 12:00:sta klo 14:25:een lukuun ottamatta 10 min keskeytystä, siis 2h 15min. Koska $\dfrac{2\text{h}\,15\text{min}}{3\text{h}} = \dfrac{135}{180} = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$, niin Matti teki työstä 3/4:aa ja Kerkko 1/4:n. Siis Kerkon työskentelyaika oli $\frac{1}{4} \cdot 4\text{h} = 1\text{h}$ ja *kina alkio klo 13:00.*

V2. Väite: Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Tällöin kolmion ala on ab.

Todistus: Merkitään kolmion sisäänpiirretyn ympyrän sädettä r:llä. Sisäänpiirretyn ympyrän sivujen vastaiset säteet ja terävien kulmien kulmanpuolittajat jakavat kolmion viiteen osaan: yhteen neliöön, jonka sivu on r, kahteen suoraakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat a ja r (näillä on yhteinen hypotenuusa ja kateetti r) sekä kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat b ja r.



Siis alkuperäisen kolmion ala on

$$A = r^2 + 2 \cdot \frac{ar}{2} + 2 \cdot \frac{br}{2} = r^2 + ar + br.$$

Ala voidaan laskea myös toisin, sillä kolmion kateetit ovat $a + r$ ja $b + r$, josta

$$A = \frac{1}{2}(a + r)(b + r) = \frac{1}{2}(r^2 + ar + br + ab).$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan eliminoitua tuntematon r:

$$A = 2A - A = r^2 + ar + br + ab - (r^2 + ar + br) = ab. \quad \square$$

Huomautus: Jatkamalla tästä saadaan helposti todistus Pythagoraan lauseelle:

$$\begin{aligned}
&(a + r)^2 + (b + r)^2 \\
&= a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2(r^2 + ar + br) \\
&= a^2 + b^2 + 2A = a^2 + b^2 + 2ab \\
&= (a + b)^2.
\end{aligned}$$

Kääntäen tehtävän väitteen voi todistaa käyttämällä Pythagoraan lausetta ensimmäisen alan kaavan sijasta.

V3. Koska $2 + 6 + 6 + 4 = 18 = 2 \cdot 9$ on jaollinen yhdeksällä, myös 2664 on. Kehitetään alkutekijähajotelma:

$$2664 = 9 \cdot 296 = 9 \cdot 8 \cdot 37 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 37.$$

Tässä 37 on alkuluku, sillä $2 \nmid 37$, $3 \nmid 37$, $5 \nmid 37$ ja $7^2 = 49 > 37$. Jos $2664n$ on kokonaisluvun neliö, niin sen alkutekijähajotelmassa kaikkien alkulukujen eksponentit ovat parillisia. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että luvun n alkutekijähajotelmassa alkulukujen eksponentit ovat parillisia, paitsi että lukujen 2 ja 37 eksponentit ovat parittomia. Koska pienimmät eksponentit ovat 0 ja 1, *pienin n, jolla tämän saa toteutettua, on $n = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 37^1 = 2 \cdot 37 = 74$.*

V4. Merkitään jonon n:ttä jäsentä a_n:llä, $x = a_5$, $y = a_6$ ja katsotaan, minkä algebrallisen muodon oletukset saavat. Fibonacci-ehdosta seuraa $a_7 = a_5 + a_6 = x + y$, $a_8 = a_6 + a_7 = y + (x + y) = x + 2y$, $a_9 = a_7 + a_8 = (x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y$ ja $a_{10} = a_8 + a_9 = (x + 2y) + (2x + 3y) = 3x + 5y$. Siis

$$322 = a_{10} = 3x + 5y. \tag{1}$$

Toisaalta $a_4 = a_6 - a_5 = y - x$, $a_3 = a_5 - a_4 = x - (y - x) = 2x - y$, $a_2 = a_4 - a_3 = (y - x) - (2x - y) = 2y - 3x$ ja $a_1 = a_3 - a_2 = 2x - y - (2y - 3x) = 5x - 3y$. Positiivisuusehdosta saadaan siten $5x - 3y > 0$ ja $2y - 3x > 0$, joista yhdistämällä

$$\frac{3}{2}x < y < \frac{5}{3}x. \tag{2}$$

Yhtälöstä (1) ja epäyhtälöstä (2) seuraa

$$
\begin{aligned}
&3x + 5 \cdot \frac{3}{2}x < 3x + 5y = 322 < 3x + 5 \cdot \frac{5}{3}x \\
\Rightarrow &\frac{21}{2}x < 322 < \frac{34}{3}x \\
\Rightarrow &28 < \frac{966}{34} < x < \frac{644}{21} < 31,
\end{aligned}
$$

sillä x on positiivinen. Tällä on vain kaksi kokonaista ratkaisua, nimittäin $x = 29$ ja $x = 30$. Jälkimmäinen tapaus ei voi toteutua, sillä jos pätisi $x = 30$, niin $5 \mid 3x + 5y = 322$, mikä on ristiriita. Siis $x = 29$, jolloin $y = \frac{1}{5}(322 - 3x) = 47$. Jonon jäsenten kokonaisuus on nyt selvää ja positiivisuus helposti tarkastettavissa: $a_4 = 47 - 29 = 18$, $a_3 = 29 - 18 = 11$, $a_2 = 18 - 11$ ja $a_1 = 11 - 7 = 4$. *Siis jonon viides jäsen on 29.*

Avoin sarja

A1. Ks. V2.

A2. Tehtävän ehdosta saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + 4^{-1}}{4} = \frac{5}{16} \\
\iff &a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
\iff &a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Koska $0 < a < b < c$, niin $1 = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < a^{-1} + a^{-1} + a^{-1} = 3a^{-1}$, joten $a < 3$. Toisaalta $1 = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} > a^{-1}$, joten $a > 1$. Ainoa kokonainen ratkaisu on $a = 2$. Jäljelle jääville tuntemattomille saadaan yhtälö

$$2^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1 \iff b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{2}.$$

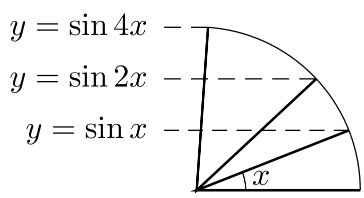
Koska $2 < b < c$, niin $\frac{1}{2} = b^{-1} + c^{-1} < 2b^{-1}$, joten saadaan $b < 4$. Ainoa kokonainen mahdollisuus on $b = 3$ ja luvun c ratkaisemiseksi saadaan yhtälö

$$3^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{2} \iff c^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \iff c = 6.$$

Siis $a = 2$, $b = 3$ ja $c = 6$.

A3. Koska $\sin x$, $\sin 2x$ ja $\sin 4x$ muodostavat aritmeettisen jonon, niin kaksinkertaisen kulman sinin ja kosinin kaavoja toistuvasti käyttämällä saadaan

$$
\begin{aligned}
& \sin 4x - \sin 2x = \sin 2x - \sin x \\
\iff & \sin 4x - 2\sin 2x = -\sin x \\
\iff & 2\sin 2x \cos 2x - 2\sin 2x = -\sin x \\
\iff & 2\sin 2x(\cos 2x - 1) = -\sin x \\
\iff & 4\sin x \cos x(\cos 2x - 1) = -\sin x \\
\iff & \cos x(\cos 2x - 1) = -\frac{1}{4} \qquad (\sin x \neq 0,\ \text{koska } x \text{ on terävä}) \\
\iff & \cos x(2\cos^2 x - 2) = -\frac{1}{4} \\
\iff & \cos^3 x - \cos x = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$



A4. Ratsun pitää siis siirtyä mahdollisimman vähillä siirroilla origosta $(0,0)$ ruutuun (x,y), jolle $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{281}$ eli yksinkertaisemmin $x^2+y^2 = 281$. Koska

$$\frac{\sqrt{281}}{\sqrt{5}} = \sqrt{56{,}2} > \sqrt{49} = 7,$$

tarvitaan enemmän kuin 7 siirtoa. Toisaalta luvun 281 parittomuudesta seuraa, että toinen koordinaateista x ja y on pariton, toinen parillinen. Koska $5 = 2^2 + 1^2$, niin koordinaattien summa vaihtuu ratsun siirrossa parillisesta parittomaksi tai toisin päin. Siksi origosta etäisyydelle $\sqrt{281}$ tarvitaan pariton määrä siirtoja, ts. vähintään 9.

Etsitään toisaalta sopiva ruutu, jolle $x^2 + y^2 = 281$ ja johon pääsee 9 siirrolla. Koska $16^2 + 5^2 = 281$, voidaan valita $(x,y) = (16,5)$. Siihen pääsee reittiä

$$
\begin{gathered}
(0,0) \to (2,1) \to (4,2) \to (6,3) \to (8,4) \to (10,5) \\
\to (12,6) \to (14,5) \to (15,7) \to (16,5)
\end{gathered}
$$

pitkin. Siis *9:llä ratsun siirrolla pääsee origosta ruutuun, joka on etäisyydellä* $\sqrt{281}$ *lähtöruudusta.*