11. 11. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut 2014

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$+$	$-$
2.	$+$	$+$	$-$	$-$
3.	$+$	$-$	$+$	$+$
4.	$-$	$-$	$-$	$-$
5.	$-$	$+$	$-$	$-$
6.	$+$	$-$	$+$	$-$

P1. Junan nopeus (liikkeellä) on aluksi v_0 ja matka-aika T_0. Matkan pituus s on tietenkin muuttumaton. Koska matka-ajasta 5% kuluu aluksi pysähdyksiin, saadaan

$$v_0 = \frac{s}{(1-0,05)T_0} = \frac{s}{0{,}95T_0}.$$

Junan nopeudeksi tulee muutoksen jälkeen v_1 ja uudeksi matka-ajaksi saadaan

$$T_1 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0.$$

Jotta pätisi $T_1 = 0{,}90T_0$, täytyy olla

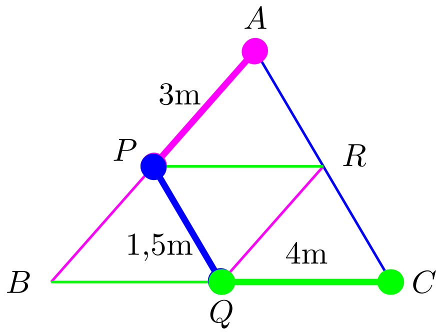
$$0{,}9T_0 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0 \iff 0{,}85T_0 = \frac{s}{v_1} \iff v_1 = \frac{s}{0{,}85T_0},$$

joten

$$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{s/(0{,}85T_0) - s/(0{,}95T_0)}{s/(0{,}95T_0)} = \frac{1/0{,}85 - 1/0{,}95}{1/0{,}95}$$
$$= 0{,}95/0{,}85 - 1 = 0{,}1/0{,}85 = 11{,}8\%.$$

Siis kohta c on oikein.

P2.



Koska kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on puolet kolmion kolmananesta sivusta, kukin kolmesta merkitystä pituudesta esiintyy rakennelmassa tasan kolmesti. Tankoa kuluu siis $3 \cdot (1{,}5\text{m} + 3\text{m} + 4\text{m}) = 25{,}5\text{m}$. Kohdat a ja b ovat oikein.

P3. Ensiksi havaitaan, että jos $a = b$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{2}{a}\right) = a = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{ab}.$$

Siis kohdat a ja c ovat mahdollisia. Toinen esimerkki osoittaa, että myös kohdan d epäyhtälö on mahdollinen: jos $a = 1$ ja $b = 4$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) = 2 : \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{8}{5} < 2 = \sqrt{1 \cdot 4}.$$

Tutkitaan vielä kohdan b epäyhtälöä:

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab} \iff 2ab : (b + a) > \sqrt{ab}$$
$$\iff 4a^2b^2 : (a + b)^2 > ab \iff 4ab : (a + b)^2 > 1$$
$$\iff 4ab > (a + b)^2 \iff 4ab > a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff 0 > a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

mikä on mieletöntä (huomattakoon, että neliöönkorotus säilytti vertailun suunnan, koska luvut olivat positiivisia). Siis kohdan b tilannetta ei voi toteuttaa.

Huomautus: Luku $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ on itse asiassa lukujen a ja b *harmoninen keskiarvo*, $\sqrt{ab}$ vastaavasti *geometrinen keskiarvo*. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon suuruusjärjestys oli tunnettu jo vanhalla ajalla osana ns. babylonialaista epäyhtälöketjua.

P4. Mikään tarjotuista vaihtoehdoista ei pidä paikkaansa, mikä todetaan tunnettuja jaollisuussääntöjä käyttäen: Merkitään kokonaislukuvun N viimeistä numeroa v:llä, numeroiden summaa s ja vuorottelevaa summaa a:lla. Huomataan, että viimeinen numero $v = 1$ ei ole viidellä jaollinen eikä numeroiden summa $s = 25 \cdot (9+7+5+3+1) = 25 \cdot 25 = 625 = 3 \cdot 208 + 1$ edes kolmella jaollinen, joten kohdat a, b ja c ovat väärin. Vuorottelevaksi numeroiden summaksi saadaan $a = 25 \cdot (0 - 9 + (7-5) + (3-1)) = 25 \cdot (-5) = -125 = -11^2 - 4$, mikä ei ole 11:llä jaollinen. Siis myöskään kohta d ei päde.

P5. Tarkastellaan hieman yleisempää tilannetta: Oletetaan, että laskun suuruus on $0{,}1n$ €, missä $n \in \mathbb{N}$. Laskun voi tietenkin maksaa täsmälleen yhdellä tavalla vain viiden sentin kolikoita käyttäen, nimittäin $2n$ viiden sentin kolikolla. Jos käytettävissä on sekä viiden että kymmenen sentin kolkioita, niin tapoja maksaa $0{,}1n$ euron lasku on $n+1$ kappaletta: käytetään k kymmenen sentin kolikkoa ja $2(n-k)$ viiden sentin kolikkoa, missä $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$. Edelleen jos käytettävissä on vain 5, 10 ja 20 sentin kolikot, niin erilaisten maksutapojen määrän voi laskea sen mukaan, kuinka monta 20 sentin kolikkoa käytetään. Jos k on laskun maksamiseen käytettyjen 20 sentin kolikoiden lukumäärä, niin $0{,}2k \le 0{,}1n$ eli $k \le \lfloor n/2 \rfloor$, ja maksettavaksi jää vielä $0,1 \cdot (n-2k)$ €, josta jo tiedetään, miten monella tavalla sen voi maksaa viiden ja kymmenen sentin kolikoilla. Tapoja on kaikkiaan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-2k+1) &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot \frac{n+1+(n-2\lfloor n/2 \rfloor + 1)}{2} \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot (n+1-\lfloor n/2 \rfloor) \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil n/2 \rceil + 1)\,.\end{aligned}$$

Sovelletaan saatuja tuloksia alkuperäiseen tehtävään. Maksussa voi käyttää 0, 1 tai 2 viidenkymmenen sentin kolikkoa. Jos 50 sentin kolikoita ei käytetä lainkaan, niin maksun voi maksaa edellisen kaavan mukaan $(\lfloor 10/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil 10/2 \rceil + 1) = 6 \cdot 6 = 36$ tavalla. Yhtä 50 sentin kolikkoa käytettäessä tapoja maksaa loput 50 senttiä muunlaisilla kolikoilla on $(\lfloor 5/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil 5/2 \rceil + 1) = 3 \cdot 4 = 12$. Lopuksi jää vielä mahdollisuus maksaa euron lasku kahdella 50 sentin kolikolla. Eri tapoja on siis $36 + 12 + 1 = 49$ ja ainoastaan kohta b on oikein.

P6. Merkitään $P(x) = (3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. Saadaan

$$\begin{aligned}a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 &= \sum_{k=1}^{7} a_k = \left(\sum_{k=0}^{7} a_k\right) - a_0 \\ =&P(1) - P(0) = (3 \cdot 1 - 1)^7 - (0-1)^7 = 2^7 - (-1 = 128 + 1 = 129.\end{aligned}$$

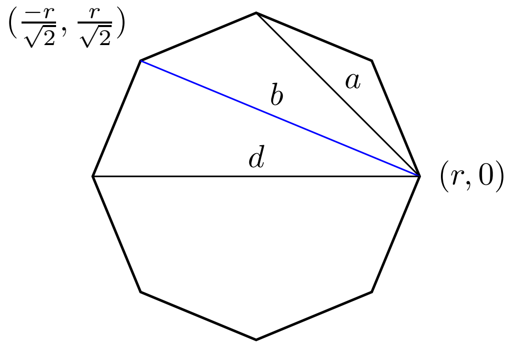
Siis kohdat a ja c ovat oikein ja muut väärin.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Säännöllisellä kahdeksankulmiolla on kolmenpituisia lävistäjiä: kahden, kolmen ja neljän sivun murtoviivaa vastaavat. Pisimmät näistä ovat myös vastaavan ympyrän halkaisijoita ja niiden yhteinen pituus on siis $d = 2r$. Lyhyimmät ovat tarkasteltavan ympyrän sisään piirretyn neliön sivuja, ja niiden pituus a saadaan Pythagoraan lauseella

$$a^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow a = r\sqrt{2}.$$

Kolmannen lävistäjänpituuden määrittämiseksi asetetaan säännöllinen kahdeksankulmio koordinaatistoon niin, että symmetriakeskipiste on origossa ja yksi kärjistä pisteessä $(r, 0)$.



Tällöin yhden lävistäjän päätepisteet ovat $(r, 0)$ ja $(r\cos(3\pi/2), r\sin(3\pi/2)) = (-r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$, joten keskimmäistä pituutta olevien lävistäjien pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{(r - (-r/\sqrt{2})^2 + (0 - r/\sqrt{2})^2} \\
&= r\sqrt{\left((\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}\right)^2 + (1/\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1} = r\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Vastaus: *Säännöllisen monikulmion lävistäjien pituudet ovat* $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$ *ja* $2r$.

P8. Jako voidaan tehdä seuraavasti: Jakajalla on n karamellin lisäksi kaksijakomerkkiä. Hän asettaa nämä $n+2$ kappaletta riviin, jolloin A saa vasemmanpuoleisen jakomerkin vasemmalle puolelle jääneet karamellit, B jakomerkkien väliin jäävät karamellit ja C loput. Jakaja tulee siis valinneeksi jakomerkkien paikat $n+2$ mahdollisesta paikasta, joten jaon voi tehdä

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

tavalla.

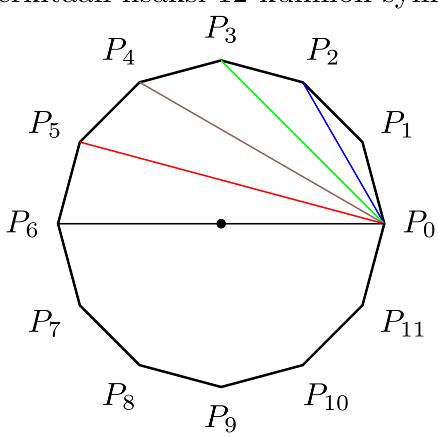
Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	−	−
2.	−	+	−	−
3.	+	−	+	−

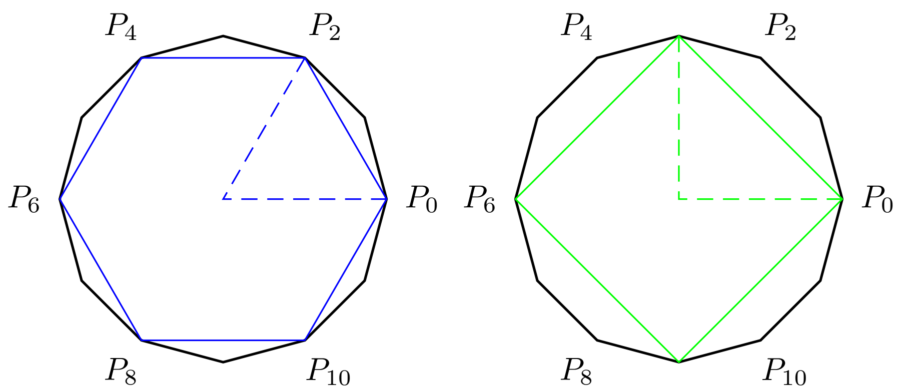
Monivalintatehtävien välillä on vastaavuudet **V1=P4**, **V2=P5** ja **V3=P6**.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4. Nimetään 12-kulmion kärjet P_i:ksi ($i \in \{0, \cdots, 11\}$) positiiviseen kiertosuuntaan lukien. Koska 12-kulmio on säännöllinen, selvitettävänä ovat pituudet $|P_0P_2|$, $|P_0P_3|$, $|P_0P_4|$, $|P_0P_5|$ ja $|P_0P_6|$. Merkitään lisäksi 12-kulmion symmetriakeskipistettä O:lla.

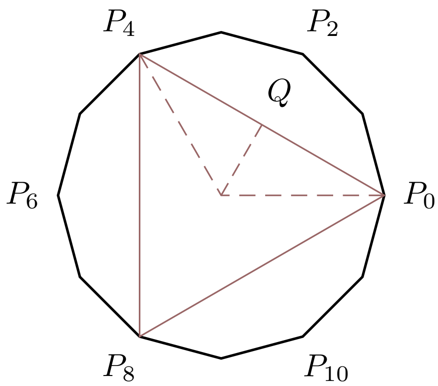


Näistä P_0P_6 on 12-kulmion ja ympyrän halkaisija, joten sen pituus on $2r$. Lävistäjät P_0P_2, P_0P_3 ja P_0P_4 ovat myös tarkasteltavan ympyrän sisään piirrettyjen säännöllisen kuusikulmion, neliön tai tasasivuisen kolmion sivuja.



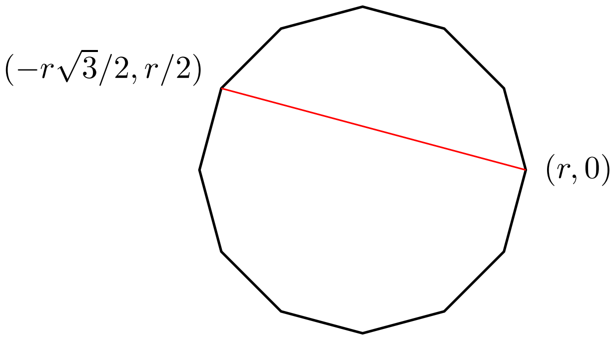
Lisäksi huomataan, että P_0P_2O ja P_0P_3O ovat kolmioita, joiden sivuista kaksi ovat ympyrän säteitä. Koska edellinen on tasasivuinen ja jälkimmäinen suorakulmainen, niin $|P_0P_2| = r$ ja $|P_0P_3| = r\sqrt{2}$.

Kolmio $P_0P_4P_8$ on tasasivuinen, ja sen sivun pituus saadaan tutulla tavalla tarkastelemalla kuvion pientä suorakulmaista kolmiota P_0OQ.



Saadaan $|P_0P_4| = 2|P_0Q| = 2r\cos(\pi/6) = 2r \cdot (\sqrt{3}/2) = r\sqrt{3}$.

Lävistäjän P_0P_5 pituuden laskemiseksi valitaan koordinaatit niin, että $O = (0,0)$ ja $P_0 = (r,0)$. Tällöin $P_5 = r(\cos(5\pi/6), \sin(5\pi/6)) = (-r\sqrt{3}/2, r/2)$



Saadaan

$$\begin{aligned}|P_0P_5| &= \sqrt{(r-(-r\sqrt{3}/2))^2 + (0-r/2)^2} = r\sqrt{\left(1+(\sqrt{3}/2)\right)^2 + (1/2)^2} \\ &= r\sqrt{1+\sqrt{3}+3/4+1/4} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Vastaus: *Lävistäjien pituudet ovat* r, $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *ja* $2r$.

Huomautus: Tehtävän voi ratkaista tietenkin monella tavalla geometrian, trigonometrian ja analyyttisen geometrian tietojen avulla. Erityisen miellyttäväksi laskut tulevat, jos taitaa kompleksiaritmetiikkaa: esimerkiksi 12-kulmion kärjet ovat tällöin kompleksilukuja z^i, missä $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ sekä $z = \sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2$, ja toiseksi pisimmän lävistäjän pituus on

$$r|z^5 - 1| = r\left|-\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2\right| = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

V5. Tehtävänanto siis kertoo, että luvut $x + \sqrt{x^2+1}$ ja $y + \sqrt{y^2+1}$ ovat toistensa käänteislukuja. Toisaalta

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2+1})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} = \sqrt{x^2+1}-x.\end{aligned}$$

Siis $\sqrt{x^2+1} - x = (x + \sqrt{x^2+1})^{-1} = y + \sqrt{y^2+1}$. Lukujen x ja y roolit voi tietysti vaihtaa, ja saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{y^2+1} \\ -x + \sqrt{x^2+1} = y + \sqrt{y^2+1}, \end{cases}$$

josta laskemalla puolittain erotukset seuraa

$$2x = x + \sqrt{x^2+1} - (-x + \sqrt{x^2+1}) = -y + \sqrt{y^2+1} - (y + \sqrt{y^2+1}) = -2y$$

eli $x = -y$ eli $x + y = 0$.

Vastaus: $x + y$ *on vakio* 0.

V6. Olkoon P yksi mallin pysäkeistä, ja tarkastellaan kaikkia pysäkin P kautta kulkevia linjoja. Kuvataan linjoja pysäkkien joukkoina; merkitään kaikkien pysäkkien joukkoa $\mathcal{P}$:llä. Jos L ja L' ovat kaksi pysäkin P kautta kulkevaa linjaa, niin P on niiden ainoa yhteinen pysäkki. Toisaalta jos Q on mikä tahansa pysäkki, niin on olemassa linja L, jolle $P, Q \in L$. Siis P:n kautta kulkevat linjat osittavat joukon $\mathcal{P} \setminus \{P\}$. Koska jokaisella linjalla on neljä pysäkkiä, tästä seuraa $|\mathcal{P}| = 1 + 3k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$.

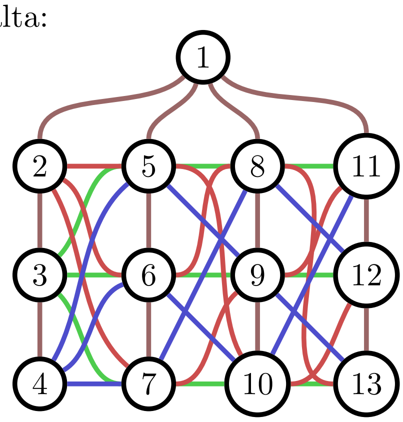
Selvästi yksi malli on sellainen, jossa $|\mathcal{P}| = 4$ ja kaikkien pysäkkien kautta ajaa yksi ainokainen linja. Tarkastellaan toista mallia, jossa $|\mathcal{P}| > 4$. Koska $k \geq 2$, pysäkin P kautta kulkevat eri linjat L ja L', joista L kulkee jonkin pysäkin $Q \neq P$ ja L' jonkin pysäkin $Q' \neq P$ kautta. Tiedetään, että $Q \neq Q'$ ja on olemassa linja L^*, jolle $Q, Q' \in L^*$. Tämä linja L^* ei voi kulkea pysäkin P kautta, koska L on ainoa linja, jolle $P, Q \in L$, ja $L \neq L^*$, sillä $Q' \notin L$, $Q' \in L^*$. Tilausvaatimusten mukaan jokaisella linjan P kautta kulkevalla k linjalla on L^*:n kanssa täsmälleen yksi pysäkki. Tästä seuraa $k = |L^*| = 4$. Siis

$$|\mathcal{P}| = 1 + 3 \cdot 4 = 13.$$

Osoitetaan vielä, että tällainen 13 linjan malli on mahdollinen. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi pysäkkejä luvuilla 1:stä 13:een. Linjoiksi valitaan

$$\begin{array}{cccc} \{1,2,3,4\}, & \{1,5,6,7\}, & \{1,8,9,10\}, & \{1,11,12,13\}, \\ & \{2,5,10,12\}, & \{2,6,8,13\}, & \{2,7,9,11\}, \\ & \{3,5,8,11\}, & \{3,6,9,12\}, & \{3,7,10,13\}, \\ & \{4,5,9,13\}, & \{4,6,10,11\}, & \{4,7,8,12\}. \end{array}$$

Linjakartta näyttää seuraavalta:



Rutiinitarkastus osoittaa, että millä tahansa kahdella linjalla on vain yksi yhteinen pysäkki. Kukin linja kattaa kuusi pysäkkiparia, joten tästä ensimmäisestä huomiosta seuraa, että yhteensä linjat kulkevat $13 \cdot 6 = 78$ pysäkkiparin kautta. Koska

$$\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78,$$

kukin pysäkkipari on hoideltu ja linjamalli täyttää vaatimukset.

Huomautus: Ratkaisussa esitelty 13 linjan malli on esimerkki ns. *äärellisestä geometriasta*. Tässä yhteydessä linjoja ja pysäkkejä nimitetään pikemminkin *suoriksi* ja *pisteiksi*. Äärellisen geometrian aksioomat vaativat, että mitkä tahansa kaksi suoraa leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä ja että minkä tahansa kahden pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen suora.

Äärellisiä geometrioita muodostetaan tyypillisesti *projektiivisina geometrioina*. Tehtävän tapauksessa lähdettäisiin liikkeelle Rubikin kuutiosta, joka muodostuu 27 pikku kuutiosta. Sopivalla koordinatisoinnilla pikkukuutioiden keskipisteet ovat pisteissä (x, y, z), missä $x, y, z \in \{-1, 0, 1\}$. Kun origokeskinen pikkukuutio poistetaan ja vastakkaisilla puolilla olevat pikkukuutiot samastetaan (eli origon kautta kulkevat suorat projisioidaan pisteiksi), jää jäljelle $(27-1)/2 = 13$ pistettä. Origon kautta kulkevat diskreetit tasot muuttuvat tässä projektiossa muodostuvan äärellisen geometrian suoriksi. Kun pisteiden (x, y, z) sijasta viitataan pisteisiin luvuilla $9x + 3y + 1$, saadaan tehtävän linjakartta.

Avoin sarja

A1=V5.

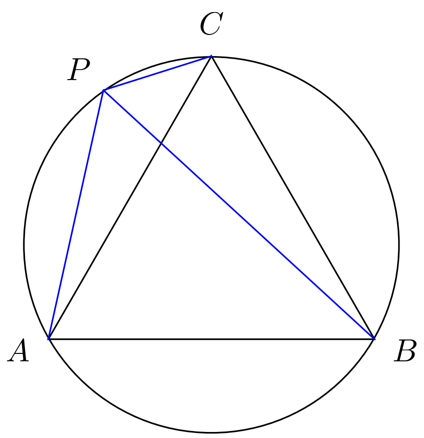
A2. Kaksimoottorinen kone pystyy lentämään todennäköisyydellä $1 - p^2$ ja nelimoottorinen todennäköisyydellä $1 - p^4 - 4p^3(1-p) - 2p^2(1-p)$; tämä saadaan tapauksista "kaikki moottorit vikaantuvat", "kolme moottoria vikaantuu ja yksi ei" (tällä yhdellä on a a a neljä mahdollisuutta) ja "kaksi saman puolen (kaksi mahdollisuutta) moottoria vikaantuu, mutta toisen puolen moottorit eivät". Kaksimoottorinen kone on turvallisempi kaikilla niillä p:n arvoilla, jotka toteuttavat ehdon

$$1 - p^2 > 1 - p^4 - 4p^3(1-p) - 2p^2(1-p)^2 = 1 + p^4 - 2p^2$$

eli $p^2 > p^4$. Tämä toteutuu aina, kun $0 < p < 1$.

Vastaus: *Kaksimoottorinen on turvallisempi kaikilla p, joille $0 < p < 1$; jos $p = 0$ tai $p = 1$, kaksi- ja nelimoottorinen lentokone ovat yhtä turvallisia.*

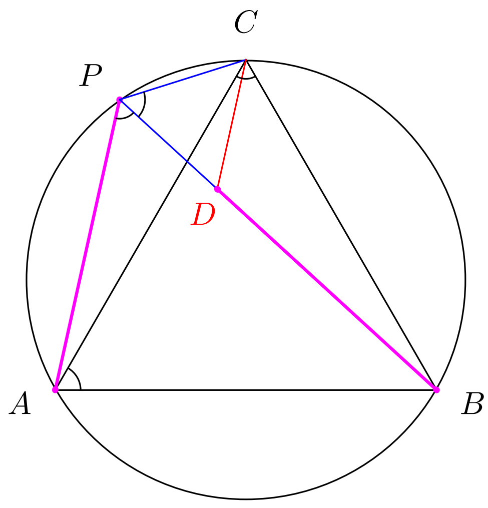
A3. Piirretään kuva tilanteesta:



Ensiksi havaitaan, että

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BPC = \pi/3 = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BPA \text{ ja } \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC,$$

kunkin parin kohdalla on nimittäin kyse yhteistä keskuskulmaa vastaavista kehäkulmista, joka kahden ensimmäisen parin kohdalla on $2\pi/3$. Valitaan janalta PB piste D, jolle $|BD| = |PA|$.



Koska $\sphericalangle DBC = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC$, $|PA| = |DB|$ ja $|AC| = |BC|$, niin kolmiot DBC ja PAC ovat yhteneviä. Erityisesti $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CPA = \sphericalangle CPB + \sphericalangle BPA = \pi/3 + \pi/3 = 2\pi/3$, joten vastaava kehäkulma on $\sphericalangle CDP = \sphericalangle BDC/2 = \pi/3$. Koska $\sphericalangle CDP = \sphericalangle BPC = \pi/3$, niin kolmio CDP on tasasivuinen. Siis

$$|PB| = |PD| + |DB| = |PC| + |PA| = |PA| + |PC|.$$

Tapa 2: Tarkastellaan r-säteisen ympyrän kulmaa φ vastaavaa jännettä. Kun koordinaatisto kiinnitetään sopivasti, niin jänteen päätepisteet ovat $(r\cos(\varphi/2), r\sin(\varphi/2))$ ja $(r\cos(\varphi/2), -r\sin(\varphi/2))$. Jänteen pituudeksi saadaan siis

$$2r\sin(\varphi/2).$$

Merkitään φ:llä kaarta CP vastaavan keskuskulman suuruutta. Sinin yhteenlaskukaavalla saadaan

$$\begin{aligned}2\sin(\pi/3+\alpha) &= 2\big(\sin(\pi/3)\cos\alpha + \cos(\pi/3)\sin\alpha\big)\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha.\end{aligned}$$

Kaikkiaan

$$\begin{aligned}|PA| + |PC| &= 2r\sin((2\pi/3-\varphi)/2) + 2r\sin(\varphi/2) = r\big(2\sin(\pi/3-\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2)\big)\\ &= r(\sqrt{3}\cos(-\varphi/2) + \sin(-\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2))\\ &= r(\sqrt{3}\cos(\varphi/2) - \sin(\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2))\\ &= r(\sqrt{3}\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)) = r(2\sin(\pi/3+\varphi/2)) = 2r(\sin((2\pi/3+\varphi)/2))\\ &= |PB|,\end{aligned}$$

sillä kaarta PB vastaavan keskuskulman suuruus on $2\pi/3+\varphi$.

A4. Todistetaan, että seuraava invariantti pysyy totena Riston parhaalla pelillä: Jokaisella $j \le \ell$, $j \in \mathbb{N}$, on korkeintaan $\ell - j$ lautasta, joilla on vähintään j rusinaa. Tämä on triviaalisti totta pelin aluksi, sillä lautaset ovat silloin tyhjiä ja $0 \le \ell - j$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $j \le \ell$ sekä lisäksi $\ell \le \ell - 0$. Oletetaan, että k kierroksen jälkeen niiden lautasten lukumäärä, joilla on vähintään j rusinaa, on $a_j \le j - \ell$, kun $j \le \ell$ ja $j \in \mathbb{N}$. Näistä a_j lautasesta Laura siirtää vasemmalle b_j kappaletta ja oikealle c_j kappaletta. Merkitään r:llä suurinta rusinoiden lukumäärää, mitä millään lautasella on; induktio-oletuksen mukaan $r < \ell$, sillä $a_\ell \le \ell - \ell = 0$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että ainakin yksi niistä lautasista, joilla on r rusinaa, on vasemmalla. Siis $b_r > 0$. Risto tyhjentää vasemmanpuoliset lautaset ja lisää oikeanpuoleisille lautasille kullekin yhden rusinan, Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $j \le \ell$ on nyt c_{j-1} lautasta, joilla on vähintään j rusinaa. Koska induktio-oletuksen mukaan

$$c_{j-1} = a_{j-1} - b_{j-1} \le a_{j-1} - b_r < a_{j-1} \le \ell - (j-1) = \ell - j + 1,$$

niin $c_{j-1} \le \ell - j$. Tapauksessa $j = 0$ induktioväite on triviaalisti totta. Siis Riston parhaalla pelillä millään lautasella ei ole rusinoita enemmän kuin $\ell - 1$.