Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisuehdotuksia 30.1.2015

1. *Ratkaise yhtälö*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x},$$

kun $x \geq 0$.

Ratkaisu. *1. ratkaisu.* Jos x on yhtälön ratkaisu, niin $x \neq 0$ ja yhtälön molempien puolien kuudennet potenssit ovat samoja, eli

$$\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3 = x^2 \quad \text{tai} \quad 1 + 3\sqrt{1+x} + 3(1+x) + (1+x)\sqrt{1+x} = x^2.$$

Tämä sievenee muotoon

$$(x+4)\sqrt{1+x} = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) \quad \text{ja} \quad x+4 = (x-4)\sqrt{x+1}.$$

Edelleen

$$(x+4)^2 = (x-4)^2(x+1)$$

ja

$$x^2 + 8x + 16 = (x^2 - 8x + 16)(x+1) = x^3 - 8x^2 + 16x + x^2 - 8x + 16.$$

Tämä sievenee muotoon $x^2 = 8x$ eli $x = 8$. Alkuperäiseen yhtälöön sijoittaminen osoittaa, että $x = 8$ todella on ratkaisu.

2. ratkaisu. Merkitään $y = \sqrt{1+x}$. Silloin $y \geq 1$ ja $x = y^2 - 1$ ja ratkaistava yhtälö on $\sqrt{1+y} = \sqrt[3]{y^2-1}$. Kun yhtälön molemmat puolet korotetaan potenssiin 6, se saa muodon

$$(1+y)^3 = (y^2-1)^2 = (1+y)^2(1-y)^2$$

ja

$$1 + y = (1-y)^2 = 1 - 2y + y^2, \qquad y^2 = 3y.$$

Ainoa mahdollisuus on $y = 3$ eli $x = 3^2 - 1 = 8$. Jälleen ratkaisun toimivuus on varmistettava sijoittamalla $x = 8$ alkuperäiseen yhtälöön.

2. *Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjan särmä on a. Olkoon $ABCD$ pyramidin pohja, E huippu ja F sivusärmän CE keskipiste. Oletetaan, että kolmio BDF on tasasivuinen. Laske pyramidin tilavuus.*

Ratkaisu. Olkoon E' neliön $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste. Koska $ABCDE$ on suora pyramidi, EE' on sen korkeusjana. Jos F' on se janan AC piste, jolle $FF' \perp AC$, niin F' on janan $E'C$ keskipiste ja yhdenmuotoisista kolmioista $EE'C$ ja $FF'C$ nähdään, että $EE' = 2 \cdot FF'$. Koska $ABCD$ on neliö, jonka sivu on a, sen lävistäjän BD pituus ja siis kolmion BDF sivun pituus on $a\sqrt{2}$. Tasasivuisen kolmion korkeusjana on $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ kertaa kolmion sivun pituus. Koska E' on janan BD keskipiste, FE' on (tasasivuisen) kolmion BDF korkeusjana, joten $FE' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

Kolmio $FE'F'$ on suorakulmainen ja $E'F' = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. Pythagoraan lauseen nojalla siis

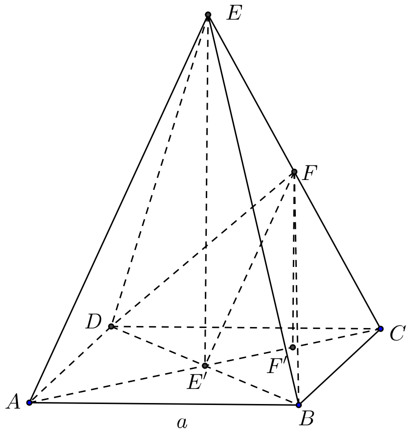
$$FF'^2 = FE'^2 - E'F'^2 = \left(\frac{6}{4} - \frac{1}{8}\right)a^2 = \frac{11}{8}a^2.$$

Siis

$$FF' = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}a, \qquad EE' = \sqrt{\frac{11}{2}}a,$$

ja pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{2}}a^3.$$



3. *Merkintä $n!$ (luvun n* kertoma*) tarkoittaa n:n pienimmän positiivisen kokonaisluvun tuloa $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Määritä suurin positiivinen kokonaisluku k, jolla 12^k on luvun $120!$ tekijä.*

Ratkaisu. $12^k = 2^{2k}3^k$. Kolme on tekijänä 40:ssä luvussa $3n$, $1 \le 3n \le 120$. Koska $9 \cdot 13 = 117$, on 13 lukua $1 \le 9n \le 120$. Lisäksi on neljä lukua $27n < 120$ ja yksi luku $81n < 120$. Suurin k, jolle 3^k on tekijänä luvussa $120!$ on siten $40+13+4+1 = 58$. Samalla periaatteella todetaan, että luvusta $120!$ löytyy alkutekijä 2 $60 + 30 + 15 + 7 + 3 + 1 = 116 = 2 \cdot 58$ kertaa. Luku 12^{58} on siis luvun $120!$ tekijä, mutta jos $k > 58$, 12^k ei ole luvun $120!$ tekijä.

4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Väritetään $n \times n$-ruudukon jokainen ruutu mustaksi tai valkoiseksi. Kuinka monella tavalla ruudukko voidaan värittää, jos vaaditaan, että jokainen vierekkäisistä ruuduista koostuva 2×2-neliö sisältää kaksi mustaa ja kaksi valkoista ruutua? Laudan ruudut on nimetty (esim. kuten šakkilaudassa), joten kiertämällä toisistaan saatavat väritykset ovat yleensä eri värityksiä.*

Ratkaisu. On kaksi tapaa värittää ylimmän rivin ruudut niin, että jokaiset kaksi vierekkäistä ruutua ovat erivärisiä: "mvmv…" ja "vmvm…". Jos ylin rivi on väritetty jommallakummalla näistä tavoista, seuraavalla rivillä ei voi olla kahta samanväristä ruutua vierekkäin, mutta molemmat edellä mainitut väritysvaihtoehdot ovat mahdollisia. Sama pätee tällöin seuraavaan riviin jne. Kaikkiaan tällaisia värityksiä on siis 2^n kappaletta.

Jos neljän ruudun neliön kolmen ruudun väri on kiinnitetty, niin näistä kahden on oltava samaa ja kolmannen eri väriä. Tällöin neljännen ruudun väri määräytyy varmasti. Oletetaan sitten, että ylimmällä rivillä on vierekkäin kaksi samanväristä ruutua. Näiden alapuolella on silloin välttämättä kaksi vastakkaisväristä ruutua. Kohdissa, joissa ylärivillä useamman kuin yhden samanvärisen ruudun jono katkeaa, syntyy tilanne, jossa 2×2-neliössä on kolme väriltään määrättyä ruutua, ja edellä sanotun nojalla neljäs määräytyy yksikäsitteisesti. Prosessia voidaan tästä jatkaa tarpeen mukaan oikealle ja vasemmalle koko rivin mitalta. Tapauksessa, jossa ylärivillä on ainakin kaksi vierekkäistä samanväristä ruutua toisen rivin kaikkien ruutujenväritys määräytyy, ja rivillä on ainakin yksi paikka jossa on kaksi vierekkäistä samanväristä ruutua. Näin ollen kaikkien rivien väritys tulee määräytymään ylimmän rivin värityksestä. Tapoja värittää ylimmän rivin ruudut on kaikkiaan 2^n. Näistä kaksi on sellaisia, joissa ei ole vierekkäisiä samanvärisiä ruutuja. Ruudukon sellaisia värityksiä, joissa ylimmällä rivillä on ainakin kaksi vierekkäistä samanväristä ruutua on siis $2^n - 2$. Värityksiä on yhteensä $2 \cdot 2^n - 2 = 2(2^n - 1)$ kappaletta.

5. *Mikko on monivalintakokeessa. Hänen ainoa tavoitteensa on päästä kokeesta läpi. Kymmenen tehtävän koe on hyväksytty, jos kokelas saa vähintään seitsemän pistettä. Oikea vaihtoehto on yhden pisteen arvoinen ja väärästä vaihtoehdosta menettää yhden pisteen. Mikko tietää varmasti osaavansa kuusi ensimmäistä tehtävää, ja hän arvioi osaavansa vastata todennäköisyydellä p oikein mihin tahansa lopuista tehtävistä, missä $0 < p < 1$. Kuinka moneen tehtävään Mikon kannattaa vastata?*

Ratkaisu. Jos $p = 1$, on tehtävä triviaali. Tarkastellaan siis tilannetta, jossa $p < 1$. Ensinnäkin, on järkevämpi vastata seitsemään tehtävään kuin kahdeksaan, sillä seitsemään vastattuaan tilanne on hyvä, jos vastaus seitsemänteen oli oikein. Oikea vastaus kahdeksanteen ei silloin hyödynnä mitään, ja väärä vastaus puolestaan kumoaa oikean vastauksen seitsemänteen. Jos taas seitsemännen tehtävän vastaus on väärin, ei kahdeksannen tehtävän vastauksella voi tilannetta pelastaa. Vastaavasti voi perustella, miksi ei kannata vastata kymmeneen tehtävään, vaan korkeintaan yhdeksään.

Vertaillaan nyt todennäköisyyksiä vastattaessa seitsemään tai yhdeksään tehtävään.

Vastattaessa seitsemään tehtävään todennäköisyys päästä läpi on p ja todennäköisyys tulla hylätyksi on $1 - p$.

Vastattaessa yhdeksään tehtävään on saatava vähintään kaksi arvatuista vastauksista oikein, jos haluaa päästä läpi. Todennäköisyys tälle on $p^3 + 3p^2(1-p)$. Selvitetään nyt, milloin

$$p^3 + 3p^2(1-p) > p.$$

Koska $p > 0$, epäyhtälö voidaan sieventää muotoon

$$p^2 + 3p(1-p) > 1,$$

eli

$$-2p^2 + 3p - 1 > 0,$$

joka puolestaan sievenee muotoon

$$p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2} < 0,$$

eli $(p-1)\left(p - \frac{1}{2}\right) < 0$. Epäyhtälö pätee siis, jos $\frac{1}{2} < p < 1$, eli tällöin kannattaa vastata yhteensä yhdeksään. Jos $p = \frac{1}{2}$, ovat seitsemän ja yhdeksän vastausta yhtä hyvät. Jos taas $p < \frac{1}{2}$, kannattaa vastata vain seitsemään.