Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 22.1.2016

Tehtävien ratkaisuja

1. *Mitkä kolmiot toteuttavat yhtälön*

$$\frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{a} = b - a,$$

kun a, b ja c ovat kolmion sivut?

Ratkaisu. Muotoillaan yhtälöä:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{a} - b + a \\ &= \frac{1}{ab}(ac^2 - a^3 + b^3 - bc^2 - ab^2 + a^2 b) = \frac{1}{ab}\left((ac^2 - bc^2) + (b^3 - a^3) + (a^2 b - ab^2)\right) \\ &= \frac{1}{ab}\left(c^2(a-b) + (b-a)(b^2 + ab + a^2) + ab(a-b)\right) = \frac{a-b}{ab}\left(c^2 - (a^2 + b^2)\right) \end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu, jos $a = b$ tai jos $c^2 = a^2 + b^2$. Edellisessä tapauksessa kolmio on tasakylkinen, jälkimmäisessä tapauksessa kolmio on suorakulmainen ja c on sen hypotenuusa.

2. *Olkoon y positiivinen kokonaisluku, joka kirjoitetaan 9-kantaisessa lukujärjestelmässä pelkillä ykkösillä. Osoita, että y on* kolmioluku, *ts. jollakin positiivisella kokonaisluvulla n luku y on n:n pienimmän kokonaisluvun summa.*

1. ratkaisu. Väite pitää paikkansa, kun y on yksi- tai kaksinumeroinen luku: $(1)_9 = 1$ ja $(11)_9 = 1 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 = 9 + 1 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Todistetaan tehtävän väite induktiolla. Induktion perusaskel sisältyy edellä esitettyihin havaintoihin. Tiedämme, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Oletetaan nyt, että jollain $k \geq 1$ k:lla ykkösellä 9-järjestelmässä kirjoitettava luku y on kolmioluku eli että jollain n on

$$y = (\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ kpl}})_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + \cdots + 9 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Silloin $(k+1)$:llä ykkösellä 9-järjestelmässä kirjoitettava luku on myös kolmioluku, sillä

$$\begin{aligned} (\underbrace{111\ldots11}_{k+1 \text{ kpl}})_9 &= 9^k + 9^{k-1} + \cdots + 9 + 1 = 9y + 1 = \frac{9n(n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (3n+1). \end{aligned}$$

Induktioaskel on näin otettu, joten todistus on valmis.

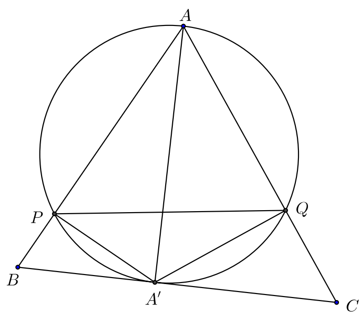
2. ratkaisu. Koska 3 on pariton, jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa kokonaisluku m_k, jolle $3^k = 2m_k + 1$. Nyt

$$y = (\underbrace{111\ldots11}_{k\ \mathrm{kpl}})_9 = \frac{1}{8}(\underbrace{888\ldots88}_{k\ \mathrm{kpl}})_9 = \frac{1}{8}((1\underbrace{000\ldots00}_{k\ \mathrm{kpl}})_9 - 1) = \frac{1}{8}(9^k - 1) = \frac{1}{8}(3^{2k} - 1)$$
$$= \frac{1}{8}(3^k - 1)(3^k + 1) = \frac{1}{8}(2m_k)(2m_k + 2) = \frac{1}{2}m_k(m_k + 1) = 1 + 2 + \cdots + m_k.$$

y on siis kolmioluku.

3. *Teräväkulmaisen kolmion yhden korkeusjanan kannasta lähtien piirretään normaalit kahta muuta sivua vastaan. Nämä normaalit kohtaavat toiset sivut pisteissä P ja Q. Osoita, että janan PQ pituus ei riipu siitä, mikä kolmesta korkeusjanasta valitaan.*

Ratkaisu. Olkoon tarkasteltava kolmio ABC. Olkoon $\angle CAB = \alpha$ ja AA' kolmion korkeusjana. Olkoon vielä kolmion ABC ala T ja sen ympärysympyrän säde R. Koska kulmat $\angle A'PA$ ja $\angle A'QA$ ovat suoria kulmia, pisteet P ja Q ovat ympyrällä, jonka halkaisija on AA'. Tämä ympyrä on kolmion APQ ympärysympyrä. Sovelletaan kolmioon APQ laajennettua sinilausetta ja kolmion alan lauseketta $2T = AA' \cdot BC$. Saadaan



$$\frac{PQ}{\sin\alpha} = AA' = \frac{2T}{BC}.$$

Siis

$$PQ = \frac{2T\sin\alpha}{BC}.$$

Mutta kun laajennettua sinilausetta sovelletaan kolmioon ABC, saadaan

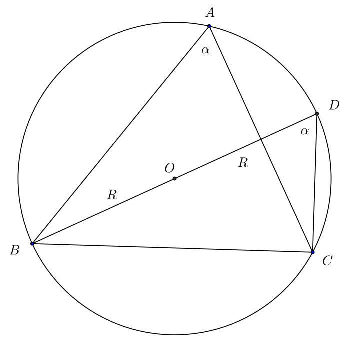
$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R.$$

Siis

$$PQ = \frac{T}{R}.$$

Yhtälön oikea puoli ei riipu siitä, mistä kolmion kärjestä lähdettiin liikkeelle, joten väite on todistettu.

[”Laajennetun sinilauseen” todistus on yksinkertainen: Piirretään kolmion ABC ympärysympyrän halkaisija $BD = 2R$. Silloin $\angle BCD$ on suora ja kehäkulmalauseen perusteella $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$. Suorakulmaisesta kolmiosta BCD saadaan heti $BC = BD \cdot \sin\alpha = 2R\sin\alpha$.]



4. *Montako positiivisten kokonaislukujen ratkaisuparia* $(a,\, b)$ *on olemassa yhtälölle*

$$(4a - b)(4b - a) = 1770^n,$$

kun n *on positiivinen kokonaisluku?*

Ratkaisu. Merkitään $4a-b = x$ ja $4b-a = y$ ja tutkitaan yhtälöä $xy = 1770^n$. Jos $(x,\, y)$ on tämän yhtälön ratkaisu, niin $15a = 4x + y$ ja $15b = x + 4y$. Nyt luvun 1770 esitys alkulukujen tulona on $1770 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 59$, joten luvun xy on oltava jaollinen 15:llä. Jotta a olisi kokonaisluku, niin jos x on jaollinen 5:llä, on luvun $y = 15a - 4x$ oltava jaollinen 5:llä ja jos x on jaollinen 3:lla, on luvun $y = 15a - 4x$ oltava jaollinen 3:lla. Vastaavat päätelmät ovat voimassa myös, kun x ja y sekä a ja b vaihdetaan keskenään. Lukujen x ja y on molempien oltava jaollisia 15:llä. Kääntäen, jos x ja y ovat jaollisia 15:llä, niin a ja b ovat kokonaislukuja. Koska

$$xy = 2^n 3^n 5^n 59^n,$$

parit

$$(x,\, y) = (2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 59^\delta,\, 2^{n-\alpha} 3^{n-\beta} 5^{n-\gamma} 59^{n-\delta})$$

ovat ratkaisuja kaikilla kokonaislukunelikoilla $(\alpha,\, beta,\, \gamma,\, \delta)$, missä $0 \le \alpha \le n$, $1 \le \beta \le n-1$, $1 \le \gamma \le n-1$ ja $0 \le \delta \le n$, ja eri nelikot antavat eri ratkaisut. Luvuilla α ja δ on siis kummallakin $n+1$ eri mahdollisuutta ja luvuilla β ja γ kummallakin $n-1$ eri mahdollisuutta. Jokainen luvuista α, β, γ, δ voidaan valita muista riippumatta. Näin ollen ratkaisuja on kaikkiaan $(n+1)^2(n-1)^2 = (n^2-1)^2$ kappaletta.

5. *Laputan hallitsija määrää valtion kaupunkien välille rakennettavaksi junaverkoston, joka noudattaa seuraavia sääntöjä:*

> Yhtenäisyys: *Kustakin kaupungista pääsee kuhunkin toiseen kaupunkiin junalla, mahdollisesti vaihtojen kautta.*
>
> N-kielto: *Ei ole sellaisia neljää kaupunkia* A, B, C *ha* D, *että* A*:sta olisi suora yhteys* B*:hen,* B*:stä* C*:hen ja* C*:stä* D*:hen, mutta oikaiseminen tällä reitillä ei olisi mahdollista:* A*:sta ei pääsisi suoraan* C*:hen,* B*:stä ei pääsisi suoraan* D*:hen eikä* A*:sta* D*:hen.*

Lisäksi suora lentolautasyhteys perustetaan täsmälleen niiden kaupunkiparien välille, joiden välillä ei ole suoraa junayhteyttä. Todista, että lentolautasverkosto ei ole yhtenäinen, kun kaupunkeja on useampia kuin yksi.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: lentolautasverkosto on yhtenäinen. Tällöin huomataan, että tilanne on symmetrinen: sekä rata- että lentolautasverkosto ovat yhtenäisiä ja N-kielto on voimassa myös lentolautasverkostolle. Jos nimittäin kaupungit A, B, C ja D muodostaisivat N:n lentolautasille, niin B, D, A ja C muodostaisivat N:n junille.

Verkostosta saattaa olla mahdollista poistaa kaupunkeja ilman, että tehtävän ehdot rikkoutuvat. Poistetaan niin monta kaupunkia, että vielä yhden poistaminen tekisi jommastakummasta liikenneverkosta epäyhtenäisen. Oletetaan siis, että Laputan verkosto olisi minimaalinen. Symmetrian vuoksi oletetaan, että kaupungin K poistamisen jälkeen lentolautasverkosto olisi epäyhtenäinen. Koska molemmat verkostot ovat yhtenäisiä, kun K on mukana, K:sta on suora junayhteys johonkin kaupunkiin A_0. Olkoon $\mathcal{A}$ niiden kaupunkien joukko, joihin pääsee A_0:sta lentolautasella kulkematta kaupungin K kautta. Koska alkuperäinen lentolautasverkosto oli yhtenäinen, K:sta pääsee lentolautasella suoraan johonkin joukon $\mathcal{A}$ kaupunkiin A_1. Olkoon vielä $\mathcal{A}_+$ niiden $\mathcal{A}$:n kaupunkien joukko, joihin pääsee junalla suoraan K:sta ja $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_+$. Molemmat joukot ovat epätyhjiä: $A_0 \in \mathcal{A}_+$ ja $A_1 \in \mathcal{A}_-$. Jokaisesta joukon $\mathcal{A}$ kaupungista pääsee lentolautasella jokaiseen muuhun. Tämä merkitsee sitä, että on olemassa kaupungit $B \in \mathcal{A}_+$ ja $C \in \mathcal{A}_-$ siten, että näiden välillä on suora lentolautasyhteys. Koska kaupungin K poistaminen tekee lentolautasverkostosta epäyhtenäisen, Laputassa on ainakin yksi kaupunki D, joka ei kuulu joukkoon $\mathcal{A} \cup \{K\}$, mutta johon on suora lentolautasyhteys K:sta. Nyt kaupungit B, C, K, D eivät noudata lentolautasverkoston N-kieltoa. B:stä ei ole yhteyttä K:hon, koska B:n ja K:n välillä on junayhteys. B:stä ei ole yhteyttä D:hen, koska $D \notin \mathcal{A}$. Samasta syystä myöskään C:stä ei ole yhteyttä D:hen. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.