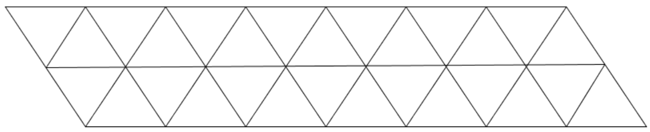
Oulun seutukunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 15.-19.2.2016
Ratkaisuja

1. Laske $11 + 22 - 33 + 44 + 55 - 66$.

a) 0 **b)** 11 **c)** 22 **d)** 33 **e)** 44

Ratkaisu. Suoralla laskulla $11 + 22 - 33 + 44 + 55 - 66 = 33 - 33 + 99 - 66 = 0 + 33 = 33$.

2. Allaoleva kuvio väritetään sinisellä ja punaisella niin, että jokainen pikkukolmio väritetään täsmälleen yhdellä värillä, ja mikäli kahdella pikkukolmiolla on yhteinen sivu, niitä ei saa värittää samalla värillä. Monellako eri tavalla kuvion voi värittää?



a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 8 **e)** 128

Ratkaisu. Vasemmanpuoleisen ylänurkan kolmion voi värittää kahdella eri tavalla. Mutta nyt ei ole vaikea havaita, että kaikki muut värit määräytyvätkin sitten yksikäsitteisesti. Siispä eri väritystapoja on täsmälleen kaksi erilaista.

3. Laske $19 \cdot 17 - 17 \cdot 15 + 15 \cdot 13 - 13 \cdot 11$.

a) 118 **b)** 119 **c)** 120 **d)** 121 **e)** 122

Ratkaisu. Lasketaan ensin $19 \cdot 17 - 17 \cdot 15 = 4 \cdot 17 = 68$ ja $15 \cdot 13 - 13 \cdot 11 = 4 \cdot 13 = 52$, jolloin tulos saadaan yhteenlaskusta $68 + 52 = 120$.

4. Lukujonon sanotaan olevan *aritmeettinen* mikäli jonossa minkä tahansa kahden peräkkäisen termin erotus on vakio. Mikä on aritmeettisen lukujonon $5, 66, 127, \ldots$ viideskymmenes eli 50. termi?

a) 2989 **b)** 2994 **c)** 3055 **d)** 3305 **e)** 6350

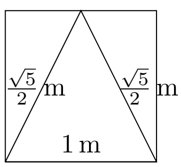
Ratkaisu. Seuraava luku saadaan edellisestä lisäämällä luku $66 - 5 = 61$. Siispä vastaus on $5 + 49 \cdot 61 = 2994$.

5. Metrin pitunen keppi jaetaan kolmeen osaan, joiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten luvut $2 : 5 : 7$. Kuinka pitkä on lyhin osa?

a) $\frac{1}{5}$ m **b)** $\frac{2}{5}$ m **c)** $\frac{1}{7}$ m **d)** $\frac{2}{7}$ m **e)** $\frac{1}{6}$ m

Ratkaisu. $\dfrac{2}{2+5+7} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$ metriä.

6. Kuutiossa, jonka sivun pituus on 1 m, on vettä 50 cm korkeudelle. Tämä vesi kaadetaan suorareunaiseen astiaan, jonka pohjana (ja kantena) on tasakylkinen kolmio. Kolmion sivujen pituudet ovat $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m ja 1 m. Vesi täyttää koko astian, mutta ei tule sen reunan yli. Kuinka korkea astia on?



a) 75 cm **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ m **c)** 1 m **d)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ m **e)** 1,5 m

Ratkaisu. Koska $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, niin lieriön pohja voidaan asetaa kuution pohjalle niin, että sen yksi sivu yhtyy kuution sivun kanssa ja kaksi muuta sivua osuvat neliön vastakkaisen sivun kärkeen, kuten ylläolevassa kuvassa. Koska jäljelle jäänyt kuution pohja voidaan myös yhdistää $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m, 1 m sivuiseksi kolmioksi, niin kolmio peittää tasan puolet kuution pohjasta. Siispä kolmiopohjaisen lieriön on oltava kaksi niin korkea kuin mille vesi ylettyy kuutiossa. Siis se on $2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$ korkea.

7. Mikä on luvun $7^7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ viimeinen numero?

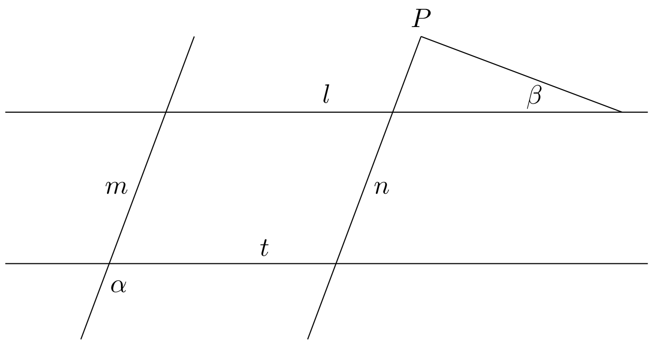
a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Ratkaisu. Positiivisten kokonaislukujen tulon viimeinen numero riippuu tietenkin vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Kun luku kerrotaan seitsemällä, sen viimeinen numero muuttuu näin:

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 7, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 8, \quad 5 \mapsto 5, \quad 6 \mapsto 2, \quad 7 \mapsto 9, \quad 8 \mapsto 6, \quad 9 \mapsto 3.$$

Erityisesti tulojen $7,\ 7 \cdot 7,\ 7 \cdot 7 \cdot 7,\ \ldots,\ 7^7$ viimeiset numerot ovat siis 7, 9, 3, 1, 7, 9 ja 3.

8. Tarkastellaan allaolevan kuvan mukaista tilannetta, jossa $\alpha > 90°$. Suorat l ja t ovat yhdensuuntaiset, ja suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset. Kulma $\angle P = 90°$. Kuinka suuri on kulma β?



a) α **b)** $180° - \alpha$ **c)** $\alpha + 45°$ **d)** $\alpha - 45°$ **e)** $\alpha - 90°$

Ratkaisu. Olkoon suorien t ja n leikkauspiste A, suorien n ja l leikkauspiste B sekä suoran l ja pisteiden P ja kulman β kärjen kautta kulkevan suoran leikkauspiste C. Koska suorat l ja t sekä m ja n ovat yhdensuuntaiset, niin $\angle ABC = \alpha$. Näin ollen kolmiossa $\triangle BPC$ kulmat ovat $180° - \alpha, 90°$ ja β. Siis $\beta = 180° - (180° - \alpha + 90°) = \alpha - 90°$.

9. Ensimmäiselle riville kirjoitetaan vain luku 1. Toiselle riville kirjoitetaan luvut 2, 3 ja 4 niin, että keskimmäinen luku 3 tulee luvun 1 alle. Edelleen kolmannelle riville kirjoitetaan luvut 5, 6, 7, 8 ja 9 niin, että keskimmäinen luku 7 tulee lukujen 1 ja 3 alle. Näin jatkamalla syntyy seuraavanlainen kuvio:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Mikä on näin muodostetussa kuviossa kymmenennen rivin vasemmanpuoleisin luku?

a) 81 **b)** 82 **c)** 99 **d)** 100 **e)** 101

Ratkaisu. Osoittautuu, että n. rivin oikeanpuoleisin luku on aina n^2. Eräs tapa vakuuttua tästä on siirtää kullakin rivillä olevia lukuja hieman ja "taittaa" rivi sitten seuraavalla tavalla:

$$1 \qquad \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & 8 & 15 \\ 5 & 6 & 7 & 14 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \qquad \cdots$$

Tiedämme siis, että yhdeksännen rivin oikeanpuoleisin luku on $9^2 = 81$. Kymmenennen rivin ensimmäisen luvun on siis oltava $9^2 + 1 = 82$.

10. Aino ja Oona tekevät koetta. Ainolla kuluu kunkin tehtävän ratkaisemiseen 4 minuuttia ja Oonalla vain 1 minuutti. Oona ottaa kesken kokeen tunnin nokoset. Aino ja Oona saavat kokeen valmiiksi täsmälleen yhtä aikaa. Kuinka monta tehtävää kokeessa on?

a) 16 **b)** 17 **c)** 18 **d)** 19 **e)** 20

Ratkaisu. Jos Aino ja Oona tekevät koetta m minuuttia, niin tehtävien lukumäärä on $m/4$. Oona tekee koetta $m - 60$ minuuttia, joten hän tekee $m - 60$ tehtävää. Siis $m/4 = m - 60$, josta $m = \frac{60 \cdot 4}{3} = 80$. Tehtäviä kokeessa oli siis $80/4 = 20$ kappaletta.

11. Järjestä pienimmästä suurimpaan luvut $a = 11/15$, $b = 13/19$, ja $c = 16/23$.

a) $b < c < a$ **b)** $c < a < b$ **c)** $a < b < c$ **d)** $c < b < a$ **e)** $b < a < c$

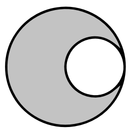
Ratkaisu. Koska $13 \cdot 23 = 299$ ja $19 \cdot 16 = 304$, on $b < c$. Koska $11 \cdot 23 = 253$ ja $16 \cdot 15 = 240$, on $c < a$. Siis $b < c < a$.

12. Potenssimerkintä 10^{50} tarkoittaa tuloa $10 \cdot 10 \cdots 10 \cdot 10$, jossa tulontekijöitä on 50 kappaletta. Mikä on luvun $10^{50} - 81$ numeroiden summa?

a) 441 **b)** 442 **c)** 450 **d)** 531 **e)** 581

Ratkaisu. Luvussa on 49 kappaletta yhdeksiköitä ja yksi 1, joten vastaus on $49 \cdot 9 + 1 = 442$.

13. Suuremman ympyrän säde on kaksi kertaa pienemmän ympyrän säde. Kuinka suuri osa kuviosta on väritetty?



a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{6}{7}$ **e)** $\frac{7}{8}$

Ratkaisu. Suuremman ympyrän ala on neljä kertaa niin iso kuin pienemmän ympyrän. Siispä pienemmän ympyrän ala on neljäsosa isomman ympyrän alasta. Kuviosta on siis väritetty kolme neljäsosaa.

14. Mikä on jakojäännös, kun luku $A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 2016$ jaetaan luvulla 5?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. Luvut a ja $a + 5$ saavat aina saman jakojäännöksen jaettaessa luvulla 5. Siis luvun A jakojäännös luvun 5 kanssa on sama kuin luvun

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0 + 1.$$

Koska $1 + 2 + 3 + 4 + 0 = 10$ eli jaollinen viidellä, niin voidaan jakaa summa

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0 + 1$$

viidellä jaollisiin pätkiin

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 0) + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0) + 1.$$

Tästä nähdään, että luvun A jakojäännös jaettaessa luvulla 5 on 1.

15. Kuinka moni kokonaislukupari (x, y) toteuttaa yhtälön $x^2 + y^2 = 5$?

a) 2 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 12 **e)** 16

Ratkaisu. On helppo vakuuttua siitä, että x^2 on 0, 1 tai 4. Samoin y^2 on 0, 1 tai 4. Koska kumpikaan neliöistä x^2 ja y^2 ei voi olla 5, ei kumpikaan niistä voi olla myöskään 0. Toisaalta, x^2 voi olla 1; tällöin $y^2 = 4$. Samoin x^2 voi olla 4, jolloin on oltava $y^2 = 1$.

Ratkaisuita $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ovat siis $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, sekä $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, joita on yhteensä 8 kappaletta.