Oulun seutukunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 19.–23.2.2018
Ratkaisuja

1. Laske $71 - 28$.

a) 14 **b)** 25 **c)** 34 **d)** 43 **e)** 53

Ratkaisu. $71 - 28 = 43$.

2. Laske $(10 - 1)(10 + 1)$.

a) 10 **b)** 20 **c)** 49 **d)** 99 **e)** 100

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan $(10 - 1)(10 + 1) = 9 \cdot 11 = 99$. Toinen tapa ratkaista tehtävä olisi käyttää kaavaa $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Nyt $(10 - 1)(10 + 1) = 10^2 - 1^2 = 100 - 1 = 99$.

3. Laske $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4) \cdot \ldots \cdot 9 \cdot (-10)$.

a) 0 **b)** 1374865 **c)** -1374862 **d)** 3628800 **e)** -3628800

Ratkaisu. Laskettavassa tulossa luku 0 ei esiinny tulontekijänä, joten tulo ei ole nolla. Täten vaihtoehto a ei ole oikein. Tulossa on $\frac{10}{2} = 5$ negatiivista tulontekijää, joten tulon arvo on negatiivinen. Siis vaihtoehdot b ja d ovat vääriä. Lisäksi tulo on jaollinen kymmenellä, koska tulon tekijänä esiintyy luku 10, joten c ei voi olla oikea vaihtoehto. Jäljelle jää e.

4. Määritellään laskuoperaatio $\star$:

$$a \star b = a + 2b.$$

Mitä on $5 \star 3$?

a) 0 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 8 **e)** 11

Ratkaisu. Huomataan, että

$$5 \star 3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

5. Koordinaatistossa on neliö, jonka kolme kärkipistettä ovat $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$. Mikä on neljäs kärkipiste?

a) $(0, 1)$ **b)** $(0, -1)$ **c)** $(-1, 0)$ **d)** $(-1, -1)$ **e)** Ei mikään edellisistä.

Ratkaisu. Sijoittamalla pisteet koordinaatistoon havaitaan, että piste $(0, 1)$ käy neliön kärjeksi, mutta muut eivät. Siis neljäs kärkipiste on $(0, 1)$.

6. Matemaatikko pyöräilee kotoaan kirjastoon nopeudella 15 km/h ja häneltä kuluu matkaan 20 minuuttia. Hän pyöräilee takaisin kotiin kirjastosta samaa reittiä nopeudella 12 km/h. Kuinka kauan paluumatka kestää?

a) 16 min **b)** 19 min **c)** 22 min **d)** 25 min **e)** 28 min

Ratkaisu. Lasketaan ensin, kuinka pitkä matka on matemaatikon kotoa kirjastoon. Koska aikaa kuluu $20\,\mathrm{min} = \frac{1}{3}\,\mathrm{h}$, niin matka on $\frac{1}{3}\,\mathrm{h} \cdot 15\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{km}$. Näin ollen paluumatkaan kuluu aikaa $\frac{5\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{km/h}} = \frac{5}{12}\,\mathrm{h} = 25\,\mathrm{min}$.

7. Rakennetaan torni käyttäen punaisia, sinisiä ja keltaisia kuutiopalikoita. Valmis torni koostuu 5 palikasta ja sen korkeus on 5 palikkaa, kunkin värinen palikka esiintyy tornissa, keltaisen päällä on vain keltaisia palikoita ja sinisen alla vain sinisiä palikoita. Kuinka monta ehdot toteuttavaa tornia on?

a) 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 6 **e)** 10

Ratkaisu. Koska keltaisen palikan päällä on vain keltaisia palikoita ja tornissa on oltava keltainen palikka, niin ylin palikka on keltainen. Vastaavasti alin palikka on sininen. Koska tornissa pitää olla myös ainakin yksi punainen palikka, niin sinisiä palikoita on enintään kolme. Lisäksi sinisten palikoiden on oltava alimmaisina, niiden päällä punaisten palikoiden ja keltaisten palikoiden on oltava päälimmäisenä. Tarkastellaan mahdollisia torneja sinisten palikoiden määrän mukaan.

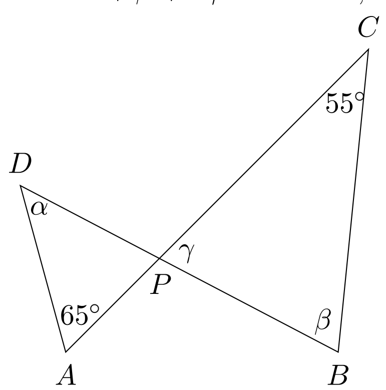
Jos tornissa on kolme sinistä palikkaa, niin tornin palikoiden on oltava alhaalta ylös sininen, sininen, sininen, punainen ja keltainen.

Jos tornissa on kaksi sinistä palikkaa, niin keltaisia tai punaisia palikoita on kaksi (ja toista yksi kappale). Saadaan siis kaksi uutta vaihtoehtoa torniksi eli sininen, sininen, punainen, punainen, keltainen ja sininen, sininen, punainen, keltainen, keltainen.

Jos tornissa on vain yksi sininen palikka, niin punaisia tai keltaisia palikoita on toista kolme kappaletta tai sitten molempia kaksi kappaletta. Uusia mahdolisia tornivaihtoehtoja ovat siis sininen, punainen, punainen, punainen, keltainen; sininen, punainen, keltainen, keltainen, keltainen sekä sininen, punainen, punainen, keltainen, keltainen. Näitä on kolme kappaletta.

Yhteensä haluttuja torneja on siis $1 + 2 + 3 = 6$ erilaista.

8. Laske $\alpha + \beta + 2\gamma$. Pisteet A, P ja C sekä D, P ja B ovat samalla suoralla.

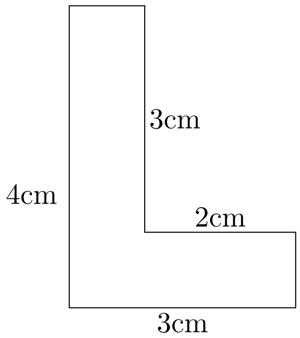


a) 60° **b)** 120° **c)** 180° **d)** 240° **e)** 300°

Ratkaisu. Koska kulmat $\angle DPA$ ja $\angle BPC$ ovat ristikulmia, niin $\angle DPA = \angle BPC = \gamma$. Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin $\alpha + \gamma + 65^\circ = 180^\circ$ ja $\beta + \gamma + 55^\circ = 180^\circ$. Täten $\alpha + \gamma + 65^\circ + \beta + \gamma + 55^\circ = 360^\circ$ eli $\alpha + \beta + 2\gamma = 240^\circ$.

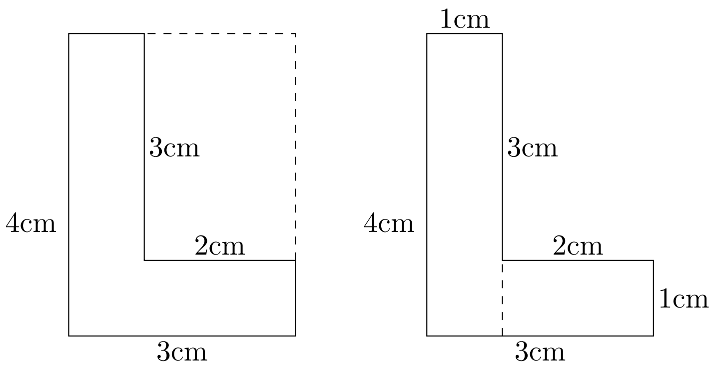
9. Mikä on kuvassa olevan L-kirjaimen muotoisen kuvion pinta-ala?

a) $6\,\mathrm{cm}^2$ **b)** $7\,\mathrm{cm}^2$ **c)** $12\,\mathrm{cm}^2$ **d)** $18\,\mathrm{cm}^2$ **e)** $35\,\mathrm{cm}^2$



Ratkaisu. Tapa 1: Kuvio voidaan täydentää suorakulmioksi, jonka sivujen pituudet ovat 3cm ja 4cm. Tarkasteltavan kuvion pinta-ala saadan, kun vähennetään tästä isommasta suorakulmiosta sellaisen suorakulmion pinta-ala, jonka sivun pituudet ovat 2cm ja 3cm. Siis kysytyn kuvion ala on $3\text{cm} \cdot 4\text{cm} - 2\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 6\text{cm}^2$.

Tapa 2: Jaetaan kuvio kahteen suorakulmioon ja lasketaan niiden alat. Kuvion pinta-ala on muodostettujen suorakulmioiden pinta-alojen summa. Päädyissä olevien sivujen pituudet ovat $4\text{cm} - 3\text{cm} = 1\text{cm}$ ja $3\text{cm} - 2\text{cm} = 1\text{cm}$. Täten kysytyn kuvion pinta-ala on $4\text{cm} \cdot 1\text{cm} + 2\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 6\text{cm}^2$.



10. Pullia leivotaan neljä pellillistä ja yhdellä pellillä on 16 pullaa. Valmiit pullat halutaan pakastaa ja ne laitetaan pakastepusseihin. Kuhunkin pussiin laitetaan joko viisi tai kuusi pullaa. Mikä on pienin määrä pusseja, joka tarvitaan, jotta kaikki pullat saadaan pakattua näiden ehtojen mukaan?

a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

Ratkaisu. Pullia on yhteensä $4 \cdot 16 = 64$. Jotta kysytty pussimäärä olisi mahdollisimman pieni, on mahdollisimman monessa pussissa oltava kuusi pullaa. Koska $11 \cdot 6 = 66 > 64$, niin pusseja, joissa on kuusi pullaa, on enintään 10. Jos tasan kymmenessä pussissa on kuusi pullaa, niin $64 - 10 \cdot 6 = 4$ pullan pitäisi olla viiden pullan pussissa. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska neljä ei ole jaollinen viidellä. Siis kuuden pullan pusseja on enintään yhdeksän. Jos niitä on tasan yhdeksän, niin $64 - 9 \cdot 6 = 10$ pullan on oltava viiden pullan pusseissa. Tämä on mahdollista, sillä $2 \cdot 5 = 10$. Täten pusseja on yhteensä vähintään $9 + 2 = 11$.

11. Laske $\lfloor(\sqrt{2} - 1)^2\rfloor$. (Merkinnällä $\lfloor x \rfloor$ tarkoitetaan suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku x.)

a) -1 **b)** 0 **c)** 0,5 **d)** 1 **e)** 2

Ratkaisu. Tarkastellaan lukua $\sqrt{2} - 1$. Koska $1^2 = 1$ ja $2^2 = 4$, niin $1 < \sqrt{2} < 2$. Täten $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. Näin ollen $0 < (\sqrt{2} - 1)^2 < 1$ ja edelleen $\lfloor(\sqrt{2} - 1)^2\rfloor = 0$.

12. 13.10.2017 oli perjantai. Milloin seuraavan kerran kuun 13. päivä oli/on perjantai päivästä 13.10.2017 lukien? (Tammi-, maalis-, touko-, heinä-, elo-, loka- ja joulukuussa on kussakin 31 päivää, vuoden 2018 helmikuussa on 28 päivää ja kaikissa lopuissa kuukausissa on 30 päivää.)

a) joulukuussa 2017 **b)** tammikuussa 2018 **c)** huhtikuussa 2018
d) heinäkuussa 2018 **e)** lokakuussa 2018

Ratkaisu. Seitsemän yön jälkeen viikonpäivä on aika sama. Koska lokakuussa on 31 päivää, niin loka- ja marraskuun 13. päivien välissä on $31 = 4 \cdot 7 + 3$ yötä. Täten 13.11.2017 oli maanantai. Vastaavalla päättelyllä saadaan, että $30 = 4 \cdot 7 + 2$ eli 13.12.2017 oli keskiviikko. Näin jatkamalla voidaan todeta, että 13.1.2018 oli lauantai, 13.2.2018 oli tiistai, 13.3.2018 on myös tiistai ja 13.4.2018 on perjantai. Täten seuraavan kerran kuun 13. päivä on perjantai huhtikuussa 2018.

13. Tarkastellaan 2018 parittoman kokonaisluvun summaa. Lukujen ei tarvitse olla erisuuria. Mitkä seuraavista ovat summalle mahdollisia arvoja?

a) $0, 10$ ja 100 **b)** $0, 55$ ja 2018 **c)** $20, 2018$ ja 2019
d) $2018, 2019$ ja 2020 **e)** Ei mikään edellisistä vaihtoehdoista.

Ratkaisu. Kahden parittoman luvun summa on parillinen ja samoin kahden parillisen luvun summa on parillinen. Voidaan jaotella 2018 lukua 1009 kahden luvun pariin ja kunkin lukuparin summa on parillinen. Täten kysytty summa on aina parillinen. Vaihtoehdot b,c,d eivät siis voi pitää paikkaansa. Näytetään, että vaihtoehto a on tosi.

Tarkastellaan summaa $S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1$ eli summaa, jossa on 1009 kappaletta lukuja 1 ja 1009 kappaletta lukuja -1. Selvästi $S_1 = 0$. Tarkastellaan nyt summaa S_2, jossa on 1008 kappaletta lukua 1, 1008 kappaletta lukua -1 ja kaksi vitosta. Nyt $S_2 = 0 + 5 + 5 = 10$. Tarkastellaan vielä summaa S_3, missä luku 1 esiintyy 1007 kertaa, luku -1 myös 1007 kertaa ja luku 25 neljä kertaa. Nyt $S_3 = 0 + 25 + 25 + 25 + 25 = 100$. Laskettavat summat ovat 2018 parittoman luvun summia. Näin ollen vaihtoehto a on tosi.

14. Kuinka monta erisuurta reaalilukuratkaisua yhtälöllä $(x^{2018} + 1)(3x^{2018} + 3) = 3$ on? (Merkinnällä x^{2018} tarkoitetaan lukua $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, missä x esiintyy 2018 kertaa.)

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 2018 **e)** 4036

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö $(x^{2018} + 1)(3x^{2018} + 3) = 3$ muodossa $3(x^{2018} + 1)^2 = 3$. Jakamalla kolmella saadaan $(x^{2018} + 1)^2 = 1$. Täten $x^{2018} + 1 = 1$ tai $x^{2018} + 1 = -1$. Koska kaikilla reaaliluvuilla x pätee $x^{2018} \geq 0$, niin jälkimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen. Siis ainoa reaalilukuratkaisu on $x^{2018} = 0$ eli $x = 0$.