Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun loppukilpailu 2019
Ratkaisuita

1.

(a) Laske $5\text{e} + 25\text{snt} - 2\text{e}$.

(b) Käytettävissäsi on 10 litran ämpäri, joka on täynnä vettä sekä 5 ja 2 litran ämpärit, jotka ovat tyhjiä. Selitä, miten saat näitä käyttäen mitattua kolme litraa vettä.

(c) Laske $2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + \ldots + 10 + \frac{1}{10} - \frac{10 \cdot 10+1}{10} - \frac{9 \cdot 9+1}{9} - \ldots - \frac{2 \cdot 2+1}{2}$.

Ratkaisu.

(a) *Vastaus:* 3,25*e*
Suoraan laskemalla saadaan

$$5\text{e} + 25\text{snt} - 2\text{e} = 3\text{e} + 25\text{snt} = 3{,}25\text{e}.$$

(b) (Tehtävän voi luonnollisesti ratkaista usealla eri tavalla ja tässä on esitetty yksi mahdollinen ratkaisutapa.) Täytetään viiden litran ämpäri ottamalla kymmenen litran ämpäristä vettä. Tämän jälkeen täytetään kahden litran ämpäri ottamalla viiden litran ämpäristä vettä. Nyt viiden litran ämpäriin jää kolme litraa vettä, mitä haluttiin saada.

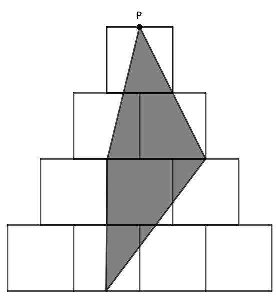
(c) *Vastaus: On* $2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + \ldots + 10 + \frac{1}{10} - \frac{10 \cdot 10+1}{10} - \frac{9 \cdot 9+1}{9} - \ldots - \frac{2 \cdot 2+1}{2} = 0$.
Koska $n + \frac{1}{n} = \frac{n \cdot n+1}{n}$ kaikilla kokonaisluvuilla $n = 1, 2, \ldots, 10$, niin

$$\begin{aligned}
&2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + \ldots + 10 + \frac{1}{10} - \frac{10 \cdot 10+1}{10} - \frac{9 \cdot 9+1}{9} - \ldots - \frac{2 \cdot 2+1}{2} \\
&= \left((2 + \frac{1}{2}) - \frac{2 \cdot 2+1}{2}\right) + \left((3 + \frac{1}{3}) - \frac{3 \cdot 3+1}{3}\right) + \ldots + \left((10 + \frac{1}{10}) - \frac{10 \cdot 10+1}{10}\right) \\
&= 0 + 0 + \ldots + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.

(a) Peilataan koordinaatistossa piste $(1, 1)$ origon suhteen. Näin saatu piste peilataan y-akselin suhteen. Mikä piste saadaan?

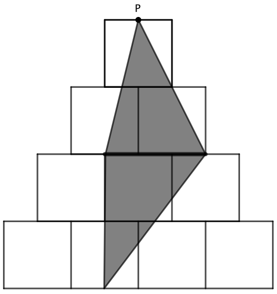
(b) Alla oleva symmetrinen kuvio koostuu kymmenestä yhtenevästä pienestä neliöstä, joista kunkin pinta-ala on 1. Piste P on ylimmän sivun keskipiste. Mikä on tummennetun alueen pinta-ala?



Ratkaisu.

(a) *Vastaus: Saadaan piste* $(1, -1)$.
Kun piste $(1, 1)$ peilataan origon suhteen, saadaan piste $(-1, -1)$. Kun tämä piste peilataan y-akselin suhteen, saadaan piste $(1, -1)$.

(b) *Tummennetun alueen pinta-ala on* 3.
Havaitaan ensin, että koska yhden neliön ala on 1, myös sen sivun pituus on 1. Jaetaan seuraavaksi tummennettu ala kahteen kolmioon kuvanmukaisesti. Kummankin kolmion kanta on $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ ja korkeus $1 + 1 = 2$ eli yhden kolmion pinta-ala on $\frac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5$. Siis koko tummennetun alueen pinta-ala on $2 \cdot 1{,}5 = 3$.



3. Eräässä matematiikkakilpailussa on 29 kilpailijaa ja he tulevat kahdeksasta eri kunnasta. Mikä on suurin määrä kilpailijoita, jotka tulevat varmasti samasta kunnasta?

Ratkaisu. *Vastaus: Jostain kunnasta tulee varmasti neljä kilpailijaa.*
Todetaan ensin, että jostain kunnasta tulee varmasti neljä kilpailijaa ja toisaalta, että on mahdollista, ettei mistään kunnasta tule yli neljää kilpailijaa. Jos kaikista kunnista tulisi enintään kolme kilpailijaa, niin kilpailijoita olisi enintään $8 \cdot 3 = 24$, mikä ei ole totta. Siispä vähintään yhdestä kunnasta tulee vähintään neljä kilpailijaa. Todetaan nyt, että on mahdollista, ettei mistään kunnasta tule yli neljää kilpailijaa. Numeroidaan kilpailijat $1, 2, 3, \ldots, 29$. On mahdollista, että kilpailijat $1, 2$ ja 3 tulevat samasta kunnasta, seuraavat kolme taas samasta kunnasta, mutta eri kunnasta kuin ensimmäiset neljä. Ryhmitellään kilpailijoista $1, 2, \ldots, 9$ aina peräkkäiset kolme tulemaan samasta kunnasta, joka on eri kunta kuin mistä edelliset ovat tulleet. Lisäksi oletetaan, että kilpailijoista $10, 11, \ldots, 29$ aina peräkkäiset neljä tulevat samasta kunnasta, joka eroaa edellisestä kunnista. On mahdollista, että kilpailijat tulevat edellisen ryhmien mukaisesti eri kunnista. Siis on myös mahdollista, että kustakin kunnasta on tullut enintään neljä kilpailijaa.

4. Täytä oheinen 4×5 ruudukko. Käytä lukuja $1 - 20$, kutakin tasan yhden kerran. Täytettäessä on noudatettava seuraavaa sääntöä: Mitkä tahansa kaksi peräkkäistä lukua on aina oltava joko samalla vaakarivillä tai samalla pystyrivillä. Oheisessa ruudukossa esimerkiksi peräkkäiset luvut 5 ja 6 noudattavat tätä sääntöä, koska ne ovat samalla vaakarivillä. Tässä tehtävässä riittää pelkkä vastaus.

2			3	11
13			8	
16	5			6

Ratkaisu.

2	4	1	3	11
17	19	18	9	10
13	20	14	8	12
16	5	15	7	6

Täytetään ruudukko seuraavien havaintojen avulla:

1. Aluksi luvulla 12 on vain yksi mahdollinen paikka.

2. Tämän jälkeen luvulla 7 on vain yksi mahdollinen paikka.
3. Nyt luvulla 4 on vain yksi mahdollinen paikka.
4. Havaitaan, että luvut 14 ja 15 eivät voi molemmat olla ensimmäisessä sarakkeessa, koska sarakkeessa on vain yksi tyhjä ruutu. Koska luvut 13 ja 16 ovat ensimmäisessä sarakkeessa, niin kumpikaan luvuista 14 tai 15 ei voi olla ensimmäisessä sarakkeessa, koska silloin toisenkin pitäisi olla. Näin ollen luku 14 on samalla vaakarivillä luvun 13 kanssa ja luku 15 puolestaan samalla vaakarivillä 16 kanssa. Sääntöjen mukaan niiden on siten oltava samalla pystyrivillä. Tämä pakottaa ne malliratakaisun ruutuihin. Tässä vaiheessa siis sijoitettiin kaksi lukua.
5. Koska alin vaakarivi on nyt täynnä, luvun 17 on oltava ensimmäisessä sarakkeessa.
6. Koska ensimmäinen sarake on nyt täynnä, luvun 1 on oltava ylimmällä rivillä
7. Koska ensimmäinen rivi on nyt täynnä, luvun 10 on oltava viidennessä sarakkeessa. Sen jälkeen luvulla 9 on vain yksi laillinen paikka.
8. Sijoittamatta on vielä luvut $18, 19, 20$, ja käytettävissä on kolme ruutua L-kuviona. Luku 19 on kummankin toisen naapuri, joten sen on oltava L-kuvion kärjessä. Kahden muun paikat määräytyvät siitä, että 18 on oltava samalla rivillä luvun 17 kanssa.

5.

(a) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut a ja b, joista toisessa esiintyy vain numeroita 9 ja 1, toisessa vain numeroita 2 ja 0 sekä on voimassa $a + b = 321$. Muista perustella vastauksesi!

(b) Anna esimerkki sellaisista positiivisista kokonaisluvuista a ja b, joissa on samat numerot eri järjestyksessä sekä kolmonen että ykkönen esiintyvät kummassakin luvuista a ja b, ja on voimassa $a + b = 1000000$. Tässä kohdassa riittää pelkkä vastaus.

Ratkaisu.

(a) *Vastaus: Kysytyt lukuparit* (a, b) *ovat* $(119, 202)$*,* $(202, 119)$*,* $(99, 222)$ *ja* $(222, 99)$
Koska on $9 + 2 = 11$, $9 + 0 = 9$, $1 + 2 = 3$ ja $1 + 0 = 1$, niin viimeiseksi numeroksi saadaan 1, kun viimeisten numeroiden summa on 11 tai 1. Jos viimeisten numeroiden summa on 1, niin viimeiset numerot ovat 1 ja 0. Jotta tällöin toiseksi viimeinen numero olisi 2, on toisen luvun oltava yksinumeroinen luku 1. Mutta tällöin toinen luku on $321 - 1 = 320$, mikä ei toteuta haluttuja ehtoja. Siis viimeisten numeroiden on oltava 9 ja 2.

Toinen luvuista ei voi olla luku 9, sillä $321 - 9 = 312$, eikä 312 täytä haluttuja ehtoja. Siis toiseksi viimeiset numerot ovat 1 ja 0 tai 9 ja 2. Täten parin lukujen a ja b mahdolliset kaksi viimeistä numeroa ovat 19 ja 02 tai 99 ja 22. Ensimmäisessä tapauksessa ensimmäisten numeroiden summan on oltava 3 ja toisessa 2. Ensimmäisessä tapauksessa mahdolliset luvut ovat siis 119 ja 202. Jälkimmäisessä tapauksessa taas ainoat mahdolliset luvut ovat 99 ja 222.

Siispä etsittävät lukuparit (a, b) ovat $(119, 202)$, $(202, 119)$, $(99, 222)$ ja $(222, 99)$.

(b) *Vastaus: Esimerkiksi luvut* $a = 816350$ *ja* $b = 183650$ *tai luvut* $a = 361850$ *ja* $b = 638150$ *käyvät vastauksiksi.*
Koska lukujen a ja b summan on oltava 1000000, niin samoissa kohdissa olevien numeroiden summan viimeisen numeron on oltava 0 tai 9 (jälkimmäinen, jos edellisten numeroiden summa on vähintään 10). Koska molemmissa esiintyvät numerot 1 ja 3, niin numerot 9 tai 8 ja 7 tai 6 esiintyvät myös. Havaitaan, että esimerkiksi seuraavat luvut $a = 816350$ ja $b = 183650$ tai luvut $a = 361850$ ja $b = 638150$ toteuttavat halutut ehdot, sillä niiden summat ovat 1000000 ja kaikissa luvuissa esiintyvät numerot yksi ja kolme.