Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 24.10.2020

1.

a) Laske

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{5}{10}+\frac{6}{12}+\frac{7}{14}+\frac{8}{16}+\frac{9}{18}+\frac{10}{20}.$$

Tässä tehtävässä riittää poikkeuksellisesti antaa pelkkä vastaus.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{5}{10}+\frac{6}{12}+\frac{7}{14}+\frac{8}{16}+\frac{9}{18}+\frac{10}{20}\\ =&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ =&10\cdot\frac{1}{2}=5\end{aligned}$$

b) Lisää lausekkeeseen

$$9\ \cdot\ 5\ -\ 4\ +\ 8\ :\ 2$$

sulkeita siten, että lausekkeen arvo on mahdollisimman pieni. Anna vastauksena sulutettu lauseke ja sen laskettu arvo.

Ratkaisu. $(9\cdot(5-(4+8)):2=9\cdot((5-(4+8)):2)=-\frac{63}{2}=-31,5$

2. Päivämäärässä 20.12.2012 vuosiluku 2012 saadaan yhdistämällä peräkkäin päivän luku 20 ja kuukauden luku 12. Montako tällaista päivämäärää on vuosien 2000 ja 3500 välillä? Kuukausia vastaavat luvut kirjoitetaan aina kahdella numerolla. Esimerkiksi helmikuuta vastaa luku 02. Helmikuussa on 28 päivää (karkausvuosia ei tarvitse huomioida) sekä huhti-, kesä-, syys- ja marraskuussa on 30 päivää. Muissa kuukausissa on 31 päivää.

Ratkaisu. Kuukauden luvulle 12 vaihtoehtoa, joten yhdessä vuosisadassa on 12 mahdollista vuotta (vuodet xx01 - xx12). Vuosiluvun kahden ensimmäisen numeron muodostama luku oltava välillä 20 – 35. Koska kuukaudessa on korkeintaan 31 päivää, niin näistä käyvät 20 – 31.

Vuosisatoina 2000 - 2800, jokaista mahdollista kuukautta kohti löytyy sopiva päivämäärä eli vuosien 2000 ja 2899 välillä on $9\cdot 12=108$ haluttua päivämäärää.

Vuosatoina 2900 ja 3000, helmikuussa ei ole sopivaa päivämäärää eli vuosien 2900 - 3099 välillä on $2\cdot 11=22$ sopivaa päivämäärää

Vuosisadalla 3100 on vain 7 sopivaa päivämäärää, koska vain 7 kuukaudessa on 31 päivää.

Yhteensä kysyttyjä päivämääriä on siis $108+22+7=137$ kappaletta.

3. Olkoot A ja B kaksi kokoelmaa kokonaislukuja. Kokoelmien A ja B *summakokoelma*, jolle käytetään merkintää $A+B$, muodostuu kaikista sellaisista erisuurista kokonaisluvuista, jotka saadaan laskemalla yhteen jokin kokoelman A luku ja jokin kokoelman B luku.

Esimerkiksi, jos kokoelma C sisältää luvut $1,2$ ja 3 ja kokoelma D sisältää luvut 10 ja 11, niin $C+D$ sisältää tällöin luvut $1+10$, $2+10$, $3+10$, $1+11$, $2+11$ ja $3+11$ eli luvut $11,12,13$ ja 14.

a) Määritä summakokoelman $A+B$ luvut, kun kokoelma A sisältää luvut 5, 8 ja 9 sekä kokoelma B sisältää luvut 7, 9 ja 10.

b) Olkoon A kokonaislukujen $99, 100$ ja 101 muodostama kokoelma. Anna jokin esimerkki sellaisesta neljän kokonaisluvun kokoelmasta B, että summakokoelmassa $A + B$ on mahdollisimman monta eri kokonaislukua. Perustele, miksi esimerkkisi toteuttaa ehdon.

c) Olkoon A kokonaislukujen 1, 2, 3 ja 4 muodostama kokoelma. Anna jokin esimerkki sellaisesta neljän kokonaisluvun kokoelmasta B, että summakokoelmassa $A + B$ on mahdollisimman vähän eri kokonaislukuja. Perustele, miksi esimerkkisi toteuttaa ehdon.

Ratkaisu. a) Summakokoelmaan kuuluvat luvut $5 + 7$, $5 + 9$, $5 + 10$, $8 + 7$, $8 + 9$, $8 + 10$, $9 + 7$, $9 + 9$ ja $9 + 10$ eli luvut 12, 14, 15, 16, 17, 18 ja 19.

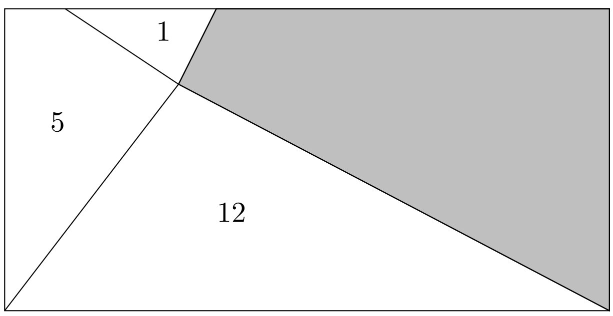
b) Koska kokoelmassa A on 3 lukua ja kokoelmassa B 4 lukua, niin summakokoelmassa $A + B$ on korkeintaan 12 eri lukua, sillä laskettavia summia on $3 \cdot 4 = 12$. Summakokoelmassa on 12 lukua, kun kaikista summista tulee eri arvo. Näin käy esimerkiksi, jos kokoelmassa B on luvut 100, 200, 300 ja 400.

c) Olkoot kokoelman B luvun suuruusjärjestyksessä $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$. Tällöin

$$1 + b_1 < 2 + b_1 < 3 + b_1 < 4 + b_1 < 4 + b_2 < 4 + b_3 < 4 + b_4,$$

joten summakokoelmassa $A + B$ on vähintään 7 erisuurta lukua. Alaraja 7 saavutetaan, kun summakokoelman summista tulee mahdollisimman paljon samoja lukuja. Näin käy esimerkiksi, kun kokoelmaan B valitaan samat luvut kuin on kokoelmassa A eli luvut 1, 2, 3 ja 4. Tällöin summakokoelmassa on luvut 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.

4. Suorakulmio on jaettu kuvan mukaisesti neljään alueeseen. Suorakulmion sisällä olevien kolmioiden korkeudet jakavat suorakulmion korkeuden suhteessa 1 : 3. Mikä on varjostetun alueen pinta-ala, kun kolmen muun alueen pinta-alat on kerrottu kuvassa?



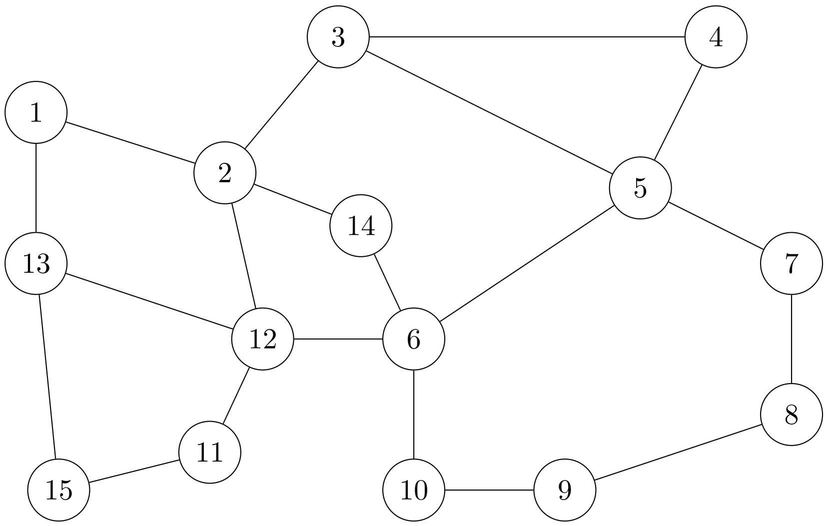
Ratkaisu. Olkoon suorakulmion leveys x ja korkeus y. Suuremman kolmion korkeus on tällöin $\frac{3}{4}y$ ja sen pinta-ala on $12 = \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4}y$. Tästä saadaan ratkaistua suorakulmion pinta-ala $xy = 32$. Varjostetun alueen pinta-ala on siis $32 - 12 - 5 - 1 = 14$.

Tehtävä 5 on seuraavalla sivulla.

5. Aavikolle on haudattu kolme aarretta: rubiini, safiiri ja timantti. Aarteiden mahdolliset paikat on merkitty alla olevaan karttaan luvuilla 1 – 15. Samassa paikassa voi olla vain yksi aarre. Paikasta toiseen pääsee vain merkittyä polkua pitkin. Polut on merkitty karttaan paikkoja yhdistävinä viivoina. Yhden polun kulkeminen kestää yhden tunnin. Aarteiden piilottaja on antanut seuraavat vihjeet:

1. Rubiinin ja safiirin lukujen summa on timantin luku.
2. Rubiinin luku on pienin.
3. Timantin luku on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.
4. Nopein reitti timantin paikasta safiirin paikkaan vie aikaa 4 tuntia.
5. Rubiinin luku on jaollinen kolmella.

Millä luvuilla merkityissä paikoissa mikäkin aarre on?



Ratkaisu. Merkitään rubiinin lukua R, safiirin lukua S ja timantin lukua T.

Kahden ensimmäisen vihjeen perusteella $R + S = T$ ja $R < S < T$.

Kolmannen vihjeen perusteella T on 1, 2, 3, 5, 7, 11 tai 13.

Lukuja 1 ja 2 ei voi esittää kahden eri suuren positiivisen kokonaisluvun summana, joten ne eivät käy luvuksi T.

Neljännen vihjeen perusteella luvut 3, 5 ja 7 eivät käy luvuksi T, koska niistä kestää mahdollisiin safiirin paikkoihin alle 4 tuntia.

Jos $T = 11$, niin neljännen vihjeen perusteella $S = 9$ ja $R = 2$ tai $S = 7$ ja $R = 4$. Vastaavasti jos $T = 13$, niin $S = 9$ ja $R = 4$ tai $S = 7$ ja $R = 6$.

Viidennen vihjeen perusteella ainoa mahdollisuus on $T = 13$, $S = 7$ ja $R = 6$.