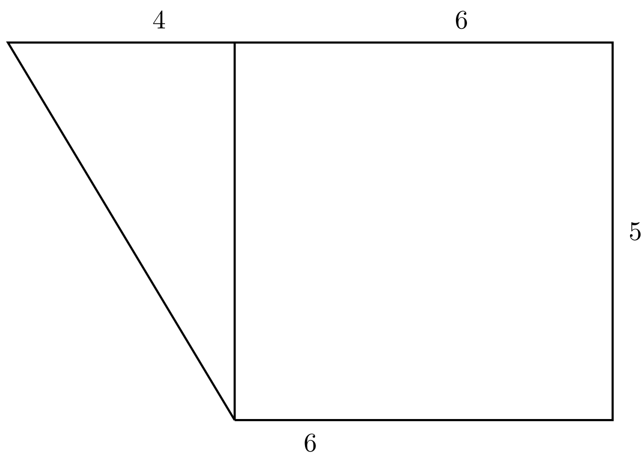
Ratkaisut Helsingin seitsemäsluokkalaisten kilpailuun

Ratkaisu tehtävään 1

Laskettava sellaisen suorakulmion piiri, jonka sivujen pituudet ovat 10, 10, 8 ja 8. Tämä piiri on $10 + 10 + 8 + 8 = 36$.

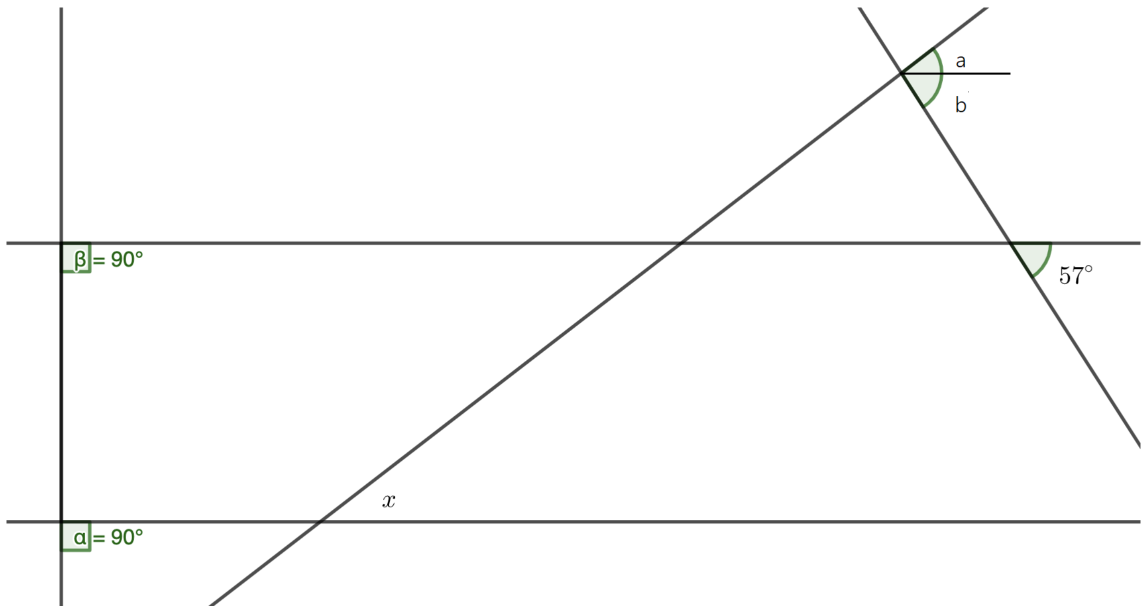
Ratkaisu tehtävään 2

Puolisuunnikas koostuu suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat 5 ja 6, sekä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateettien pituudet ovat 5 ja $10 - 6 = 4$. Suorakulmion ala on $5 \cdot 6 = 30$, ja kolmion ala on $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Puolisuunnikkaan ala on siis $30 + 10 = 40$.



Ratkaisu tehtävään 3

Kulma $b = 57°$, ja kulma $a = 95° - 57° = 38°$. Nyt $x = a = 38°$.



Ratkaisu tehtävään 4

Olkoon v vihreiden kameleonttien määrä, s sinisten kameleonttien määrä ja p punaisten kameleonttien määrä. Tehtävässä annetut tiedot voidaan ilmaista

$$v = 2s$$

$$p = v$$

$$s + p + 4 = 2v.$$

Sijoittamalla kaksi ensimmäistä yhtälöä viimeiseen saadaan

$$\frac{v}{2} + v + 4 = 2v,$$

josta voidaan ratkaista $v = 8$. Nyt $p = 8$, ja $s = \frac{8}{2} = 4$. Kameleonttien yhteenlasketuksi määräksi saadaan siis 20.

Ratkaisu tehtävään 5

Tornit ovat (yksi torni jokaisella rivillä, P on punainen palikka, S sininen.)

PSPSSSS
PSSPSSS
PSSSPSS
PSSSSPS
PSSSSSP

SPSPSSS
SPSSPSS
SPSSSPS
SPSSSSP
SSPSPSS

SSPSSPS
SSPSSSP
SSSPSPS
SSSPSSP
SSSSPSP
Siis 15 tornia.

Vaihtoehtoinen ratkaisu tehtävään 5 Punaisten palikoiden väliin tulee vähintään yksi sininen. Laskemme sellaisten tornien määrän, joissa on 4 sinistä ja 2 punaista palikkaa ilman lisäehtoja. Tämä on sama määrä, kuin tehtävässä kysyttyjen tornien määrä, koska jokaisesta tällaisesta tornista saadaan tehtävässä kysytty laittamalla yksi ylimääräinen sininen palikka punaisten väliin, ja kääntäen jokaisesta tehtävässä kysytystä tornista saadaan tällainen torni poistamalla yksi sininen palikka punaisten välistä.

Meillä on siis 6 sinisen palikan torni, ja kaksi palikoista pitäisi maalata punaisiksi. Voimme valita ensimmäisen maalattavan palikan 6 tavalla. Jokaista tällaista valintaa kohti voimme valita toisen maalattavan palikan 5 tavalla. Siis yhteensä $6 \cdot 5 = 30$ tapaa maalata. Nyt olemme vain muodostaneet jokaisen tornin kahdella eri tavalla, koska esimerkiksi ”Ensin maalataan kolmas alhaalta, ja sitten viides alhaalta” tuottaa saman tornin kuin ”Ensin maalataan viides alhaata, ja sitten kolmas alhaalta.” Näin ollen torneja on $\frac{30}{2} = 15$.

Ratkaisu tehtävään 6

$$\frac{4a^2b + ab^2}{ab} = \frac{ab(4a+b)}{ab} = 4a + b.$$

Ratkaisu tehtävään 7

Annetuista vaihtoehdoista 16 ja 31 ovat ainoat, joista jää yksi yli jaettaessa viidelle. Nämä kummatkin ovat myös sellaisia, että niistä jää yksi yli jaettaessa kolmelle. Jaettaessa 16 kahdeksalle ei jää yhtään yli, joten se ei kelpaa. $8 \cdot 3 + 7 = 24 + 7 = 31$, joten 31 kelpaa ratkaisuksi.

Ratkaisu tehtävään 8

Annetuista ratkaisuvaihtoehdoista $a_n = n(n-1)$ ja $a_n = 2^n - 2$ ovat ainoat, jotka toteuttavat ehdon $a_1 = 0$. Näistä jälkimmäinen ei toteuta ehtoa $a_4 = 12$. Laskemalla a_1, a_2, a_3 ja a_4 jonolle $a_n = n(n-1)$ todetaan, että tämä jono täyttää kaikki tehtävässä annetut ehdot.

Ratkaisu tehtävään 9

$$1 \star 2 = 5 \cdot 1 - \frac{2}{2} = 4.$$

Ratkaisu tehtävään 10

Kysytty pinta-ala on kuvaan vahvennetulla merkittyjen alueiden yhteenlaskettu pinta-ala. Koska kuvan tähti muodostuu kahdesta tasasivuisesta kolmiosta, kuvan kulma $c = 60°$. Koska säännöllisen kuusikulmion kulma on $120°$, kulma $d = \frac{120°-60°}{2} = 30°$. Siis väritetty kolmio on puolet tasasivuisesta kolmiosta, ja pituus b on puolet pituudesta a. Pythagoraan lauseesta saadaan

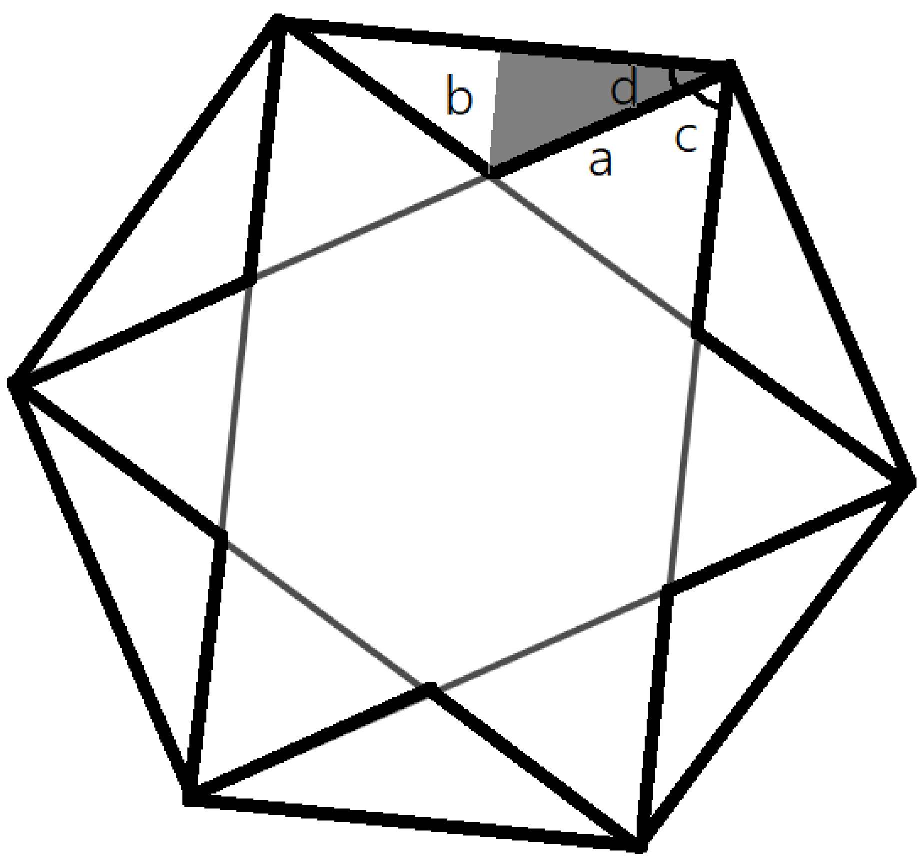
$$1^2 + b^2 = (2b)^2,$$

eli $1 = 3b^2$, josta saadaan $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Yhden vahvennetuista kolmioista pinta-ala on siis

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tehtävässä kysytty pinta-ala on siis $6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.



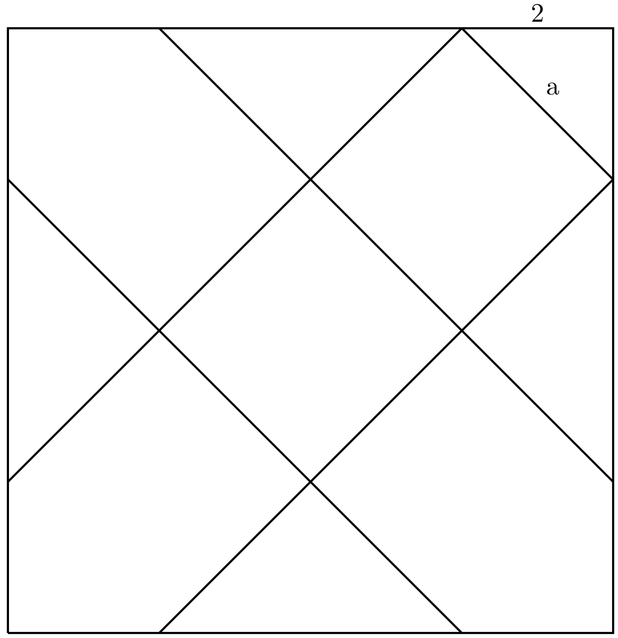
Ratkaisu tehtävään 11

Merkitään lukuja a ja b, missä $a > b$. Nyt

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 500 \cdot 3 = 1500.$$

Ratkaisu tehtävään 12

Kuvassa $a^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Toisaalta pienen neliön sivu on a, joten kysytty pinta-ala on $a^2 = 8$.



Ratkaisu tehtävään 13

Kun luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä x nollaa kerrotaan luvulla, jossa on ykkönen, ja sen perässä y nollaa saadaan luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä $x + y$ nollaa.

Olkoon n kuten tehtävänannossa. Oletetaan, että luvussa n on k numeroa. Nyt ainakin varmasti $k \geq 10$. Olkoon a luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä $k - 1$ nollaa, ja b luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä k nollaa. Nyt $a \leq n \leq b$.

Nyt $11^n \geq 10^a$. Kirjoittamalla 10^a järkyttävän kokoiseksi kertolaskuksi havaitaan, että vastauksessa on ykkönen, ja sen perässä a nollaa.

Toisaalta $n^{11} \leq b^{100}$. Kirjoittamalla b^{100} järkyttävän kokoiseksi kertolaskuksi havaitaan, että vastauksessa on ykkönen, ja sen perässä $100k$ nollaa.

On siis vertailtava lukuja $100k$ ja a, missä a:ssa on ykkönen ja sen perässsä $k-1$ nollaa, $k \geq 10$. Näistä a on selvästi suurempi.

Siis 11^n on suurempi kuin n^{11}.

Ratkaisu tehtävään 14

$6^4 > 1000$, joten $0 < x, y < 6$. Kokeilemalla löydetään ratkaisu $x = 5, y = 2$. Näin ollen vaihtoehto $y = 1$ on pois laskuista, samoin $x = 5, y > 2$. Jos $x \leq 4$, $x^4 \leq 256$, ja tällöin pitäisi olla $y > 4$, eli ei muita ratkaisuja kuin $x = 2, y = 5$.

Kaikki vaihtoehdot käyty läpi, ja ainoat ratkaisut ovat $x = 5, y = 2$ ja $x = 2, y = 5$. Koska vastausvaihtoehtojen joukossa ei ole vaihtoehtoa kaksi, tehtävän laatijan on täytynyt ajatella nämä samaksi ratkaisuksi, ovathan ne symmetriset, ja oikea vastaus on yksi ratkaisu.