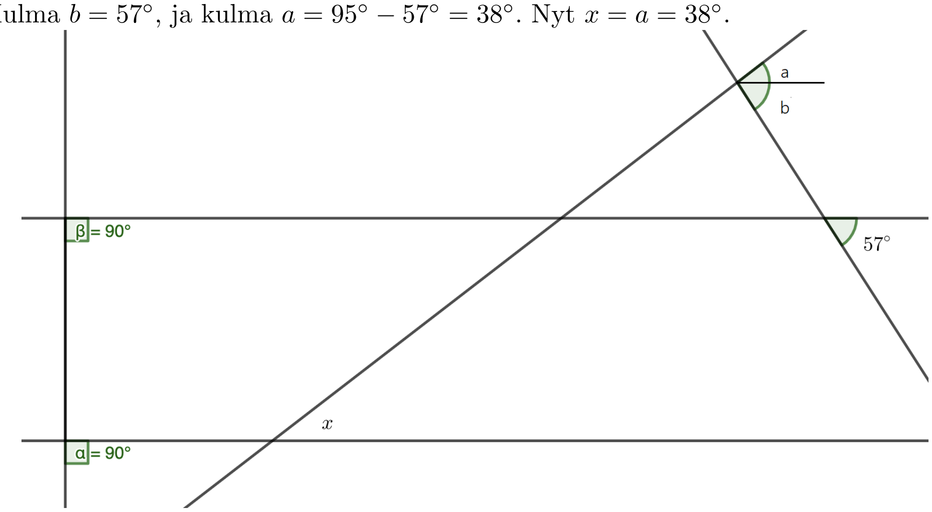
Ratkaisut Helsingin kahdeksasluokkalaisten kilpailuun

Ratkaisu tehtävään 1

Laskettava sellaisen suorakulmion pinta-ala, jonka sivujen pituudet ovat 9cm ja 7cm. Tämä ala on $9\text{cm} \cdot 7\text{cm} = 63\text{cm}^2$.

Ratkaisu tehtävään 2

Kulma $b = 57°$, ja kulma $a = 95° - 57° = 38°$. Nyt $x = a = 38°$.



Ratkaisu tehtävään 3

Annetuista vaihtoehdoista 16 ja 31 ovat ainoat, joista jää yksi yli jaettaessa viidelle. Nämä kummatkin ovat myös sellaisia, että niistä jää yksi yli jaettaessa kolmelle. Jaettaessa 16 kahdeksalle ei jää yhtään yli, joten se ei kelpaa. $8 \cdot 3 + 7 = 24 + 7 = 31$, joten 31 kelpaa ratkaisuksi.

Ratkaisu tehtävään 4

Annetuista ratkaisuvaihtoehdoista $a_n = n(n-1)$ ja $a_n = 2^n - 2$ ovat ainoat, jotka toteuttavat ehdon $a_1 = 0$. Näistä jälkimmäinen ei toteuta ehtoa $a_4 = 12$. Laskemalla a_1, a_2, a_3 ja a_4 jonolle $a_n = n(n-1)$ todetaan, että tämä jono täyttää kaikki tehtävässä annetut ehdot.

Ratkaisu tehtävään 5

Merkitään lukuja a ja b, missä $a > b$. Nyt

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 500 \cdot 3 = 1500.$$

Ratkaisu tehtävään 6

Tornit ovat (yksi torni jokisella rivillä, P on punainen palikka, S sininen.)

PSPSPSS
PSPSSPS
PSPSSSP
PSSPSPS
PSSPSSP

PSSSPSP
SPSPSPS
SPSPSSP
SPSSPSP
SSPSPSP

Siis 10 tornia.

Vaihtoehtoinen ratkaisu tehtävään 6 Punaisten palikoiden väliin tulee vähintään yksi sininen. Laskemme sellaisten tornien määrän, joissa on 2 sinistä ja 3 punaista palikkaa ilman lisäehtoja. Tämä on sama määrä, kuin tehtävässä kysyttyjen tornien määrä, koska jokaisesta tällaisesta tornista saadaan tehtävässä kysytty laittamalla yksi ylimääräinen sininen palikka kumpaankin punaisten palikoiden väliin, ja kääntäen jokaisesta tehtävässä kysytystä tornista saadaan tällainen torni poistamalla yksi sininen palikka kummastakin punaisten palikoiden välistä.

Meillä on siis 5 punaisen palikan torni, ja kaksi palikoista pitäisi maalata sinisiksi. Voimme valita ensimmäisen maalattavan palikan 5 tavalla. Jokaista tällaista valintaa kohti voimme valita toisen maalattavan palikan 4 tavalla. Siis yhteensä $5 \cdot 4 = 20$ tapaa maalata. Nyt olemme vain muodostaneet jokaisen tornin kahdella eri tavalla, koska esimerkiksi ”Ensin maalataan kolmas alhaalta, ja sitten viides alhaalta” tuottaa saman tornin kuin ”Ensin maalataan viides alhaalta, ja sitten kolmas alhaalta.” Näin ollen torneja on $\frac{20}{2} = 10$.

Ratkaisu tehtävään 7

Olkoon v vihreiden kameleonttien määrä, s sinisten kameleonttien määrä ja p punaisten kameleonttien määrä. Tehtävässä annetut tiedot voidaan ilmaista

$$v = 2s$$

$$p = v$$

$$s + p + 4 = 2v.$$

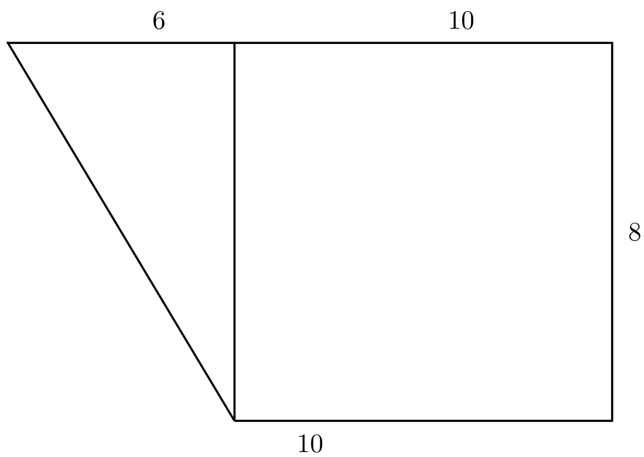
Sijoittamalla kaksi ensimmäistä yhtälöä viimeiseen saadaan

$$\frac{v}{2} + v + 4 = 2v,$$

josta voidaan ratkaista $v = 8$. Nyt $p = 8$, ja $s = \frac{8}{2} = 4$. Kameleonttien yhteenlasketuksi määräksi saadaan siis 20.

Ratkaisu tehtävään 8

Kuvaan merkityssä kolmiossa kateettien pituudet ovat $16 - 10 = 6$ ja 8. Kolmion hypotenuusa on siis $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Piiri on siis $16 + 10 + 10 + 8 = 44$.



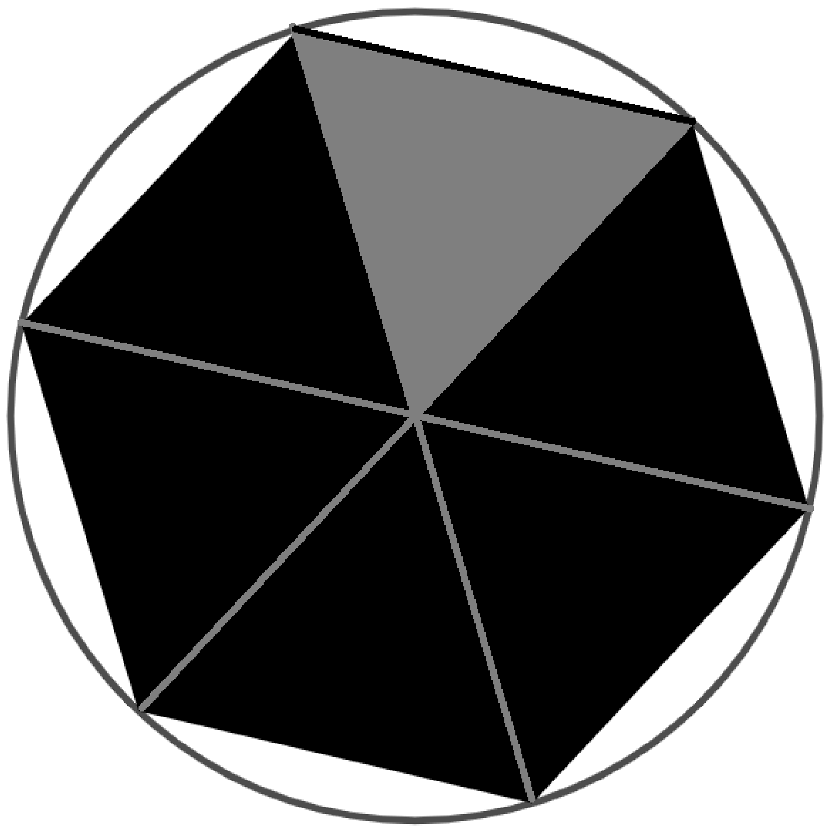
Ratkaisu tehtävään 9

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}+b=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}+b=(a-b)+b=a.$$

Ratkaisu tehtävään 10

Kuvaan merkitty kolmio on tasasivuinen, ja sen sivun pituus on 1. Näin ollen kolmion pinta-ala on $\frac{\sqrt{3}/2\cdot 1}{2}=\sqrt{3}/4$. Näin ollen kuusikulmion pinta-ala on $6\cdot\sqrt{3}/4=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot 1^2=\pi$. Siis kysytty pinta-ala on $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



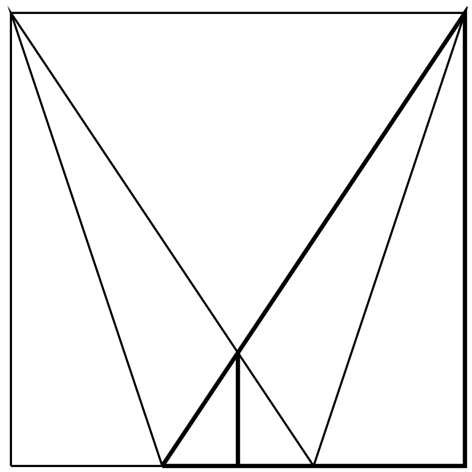
Ratkaisu tehtävään 11

$$3 \star 4 = 5 \cdot 3 - \frac{4}{2} = 13.$$

Ratkaisu tehtävään 12

Tehtävässä kysytyn kolmion kannan pituus on $\frac{1}{3}$. Kuvaan vahvennetut kolmiot ovat yhdenmuotoisia, ja isomman niistä korkeuden ja kannan suhde on $3 : 2$. Näin ollen niistä pienemmän korkeus on $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

Näin ollen tehtävässä kysytum kolmion ala on $\frac{1/3 \cdot 1/4}{2} = \frac{1}{24}$



Ratkaisu tehtävään 13

Kun luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä x nollaa kerrotaan luvulla, jossa on ykkönen, ja sen perässä y nollaa saadaan luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä $x + y$ nollaa.

Olkoon n kuten tehtävänannossa. Oletetaan, että luvussa n on k numeroa. Nyt ainakin varmasti $k \geq 10$. Olkoon a luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä $k - 1$ nollaa, ja b luku, jossa on ykkönen, ja sen perässä k nollaa. Nyt $a \leq n \leq b$.

Nyt $11^n \geq 10^a$. Kirjoittamalla 10^a järkyttävän kokoiseksi kertolaskuksi havaitaan, että vastauksessa on ykkönen, ja sen perässä a nollaa.

Toisaalta $n^{11} \leq b^{100}$. Kirjoittamalla b^{100} järkyttävän kokoiseksi kertolaskuksi havaitaan, että vastauksessa on ykkönen, ja sen perässä $100k$ nollaa.

On siis vertailtava lukuja $100k$ ja a, missä a:ssa on ykkönen ja sen perässsä $k-1$ nollaa, $k \geq 10$. Näistä a on selvästi suurempi.

Siis 11^n on suurempi kuin n^{11}.

Ratkaisu tehtävään 14

$6^4 > 1000$, joten $0 < x, y < 6$. Kokeilemalla löydetään ratkaisu $x = 5, y = 2$. Näin ollen vaihtoehto $y = 1$ on pois laskuista, samoin $x = 5, y > 2$. Jos $x \leq 4$, $x^4 \leq 256$, ja tällöin pitäisi olla $y > 4$, eli ei muita ratkaisuja kuin $x = 2, y = 5$.

Kaikki vaihtoehdot käyty läpi, ja ainoat ratkaisut ovat $x = 5, y = 2$ ja $x = 2, y = 5$. Koska vastausvaihtoehtojen joukossa ei ole vaihtoehtoa kaksi, tehtävän laatijan on täytynyt ajatella nämä samaksi ratkaisuksi, ovathan ne symmetriset, ja oikea vastaus on yksi ratkaisu.

Ratkaisu tehtävään 15

Erotus on

$$\frac{a}{b} - \frac{3}{5} = \frac{5a - 3b}{5b}.$$

Tutkitaan oikeanpuoleista osamäärää.

Koska tämä ei saanut mennä nollaksi, niin osoittajan itseisarvo $|5a - 3b| \geq 1$. Jotta epäyhtälö toteutuisi on siis nimittäjän oltava ≥ 150, eli $b \geq 30$.

Jos $b = 30$, niin nimittäjä on 150. Tällöin valinta $a = 50$ antaa osoittajaksi nollan, eikä epäyhtälö päde. Mikä tahansa muu a:n valinta antaa osoittajan itseisarvoksi vähintään 5, eikä epäyhtälö edelleenkään päde, eli valinta $b = 30$ ei kelpaa.

Jos $b = 31$, niin nimittäjä on 155. Osoittajan $5a - 3b = 5a - 93$ on oltava tällöin ± 1, mikä ei toteudu millään a:n arvolla. $5a$ on nimittäin viidellä jaollinen, ja pienin osoittajan itseisarvo saadaan valinnalla $a = 19$, mikä antaa osoittajaksi kakkosen.

Mutta $b = 32$ toimii. $5a - 3 \cdot 32 = -1$, kun $a = 19$. Pienin mahdollinen b:n arvo on siis 32.