Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 27.2.–3.3.2023
Ratkaisuja

1. Laske $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$.

a) 55 **b)** -5 **c)** -55 **d)** -15 **e)** 5

Ratkaisu. b) -5.

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-10=-1+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-5.$$

2. Laske $5+55+555+5555+55555+555555$.

a) 5555550 **b)** 1010105 **c)** 612050 **d)** 617280 **e)** 557205

Ratkaisu. d) 617280. Koska

$$5+55+55+55+55+55=5+5\cdot 55=5+275=280,$$

niin summan $5+55+555+5555+55555+555555$ viimeiset numerot ovat 2, 8 ja 0.

3. Jos seuraavat luvut asetetaan suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan, niin mikä luku on keskimmäinen?

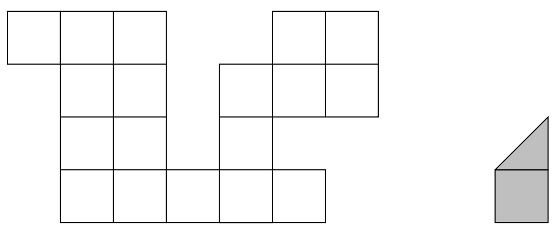
$$\frac{1}{2},\qquad \frac{10}{22},\qquad \frac{110}{222},\qquad \frac{112}{221},\qquad \frac{211}{112}$$

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{10}{22}$ **c)** $\frac{110}{222}$ **d)** $\frac{112}{221}$ **e)** $\frac{211}{112}$

Ratkaisu. a) $\frac{1}{2}$. Huomataan, että

- $\frac{10}{22}<\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$,
- $\frac{110}{222}<\frac{111}{222}=\frac{1}{2}$,
- $\frac{112}{221}>\frac{112}{224}=\frac{1}{2}$ ja
- $\frac{211}{112}>1>\frac{1}{2}$.

4. Aino haluaa laatoittaa alla olevan alueen kuvan mukaisilla harmailla laatoilla. Kuinka monta laattaa Aino tarvitsee?



a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

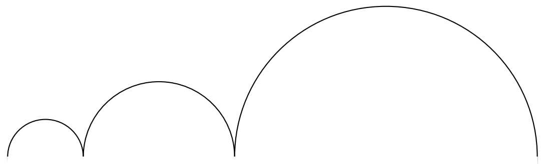
Ratkaisu. b) 12. Laatoitettava alue muodostuu 18 neliöstä, joten jos jokaisen neliön sivun pituus on 1, niin koko alueen ala on 18. Koska yhden laatan ala on tällöin $\frac{3}{2}$ ja $12\cdot\frac{3}{2}=6\cdot 3=18$, niin laattoja tarvitaan 12.

5. Essi ja Oiva pelaavat seuraavaa kolikonheittopeliä: Essi heittää kolikkoa niin kauan, että saa klaavan, jolloin kolikko siirtyy Oivalle, ja peli jatkuu samalla tavalla. Kun kolikkoa on heitetty yhteensä 20 kertaa, kolikko siirtyy Oivalle kolmannen kerran. Kuinka montaa kruunaa Essi ja Oiva ovat saaneet yhteensä pelin aikana?

a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 19

Ratkaisu. a) 15. Kun kolikko siirtyy Oivalle kolmannen kerran, se on siirtynyt Essille kaksi kertaa, koska Essi aloitti pelin. Näin ollen klaavoja on tullut yhteensä 5 ja kruunia $20-5=15$.

6. Sammakko loikkii kolme puoliympyrän muotoista hyppyä alla olevan kuvan osoittamalla tavalla, lähtien pisteestä A ja päätyen pisteeseen B. Korkeimmalla hypyllään sammakko käy yhden metrin korkeudella, ja jokainen hyppy on aina kaksi kertaa edellisen korkuinen. Kuinka monen metrin päässä pisteet A ja B ovat toisistaan?



a) 1 **b)** $2\frac{1}{2}$ **c)** $3\frac{1}{3}$ **d)** $3\frac{1}{2}$ **e)** 4

Ratkaisu. d) $3\frac{1}{2}$. Sammakon toisen hypyn korkeus on $\frac{1}{2}$ ja ensimmäisen hypyn korkeus on $\frac{1}{4}$. Hypyt ovat puoliympyrän muotoisia, joten jokaisen hypyn pituus on kaksi kertaa hypyn korkeus. Näin ollen pisteiden A ja B välinen etäisyys on

$$2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1=\frac{1}{2}+1+2=3\tfrac{1}{2}.$$

7. Tiedetään, että luvut a,b,c,d,e,f,g,h,i ja j ovat kokonaislukuja. Jos

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=50,$$

niin kuinka moni luvuista a,b,c,d,e,f,g,h,i ja j korkeintaan voi olla pienempi kuin 5?

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 9

Ratkaisu. e) 9. Ensimmäiset yhdeksän lukua, a,b,c,d,e,f,g,h ja i, voivat olla mitä vain, kun valitaan $j=50-a-b-c-d-e-f-g-h$. Tällöin $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=50$.

8. Mikä on alla olevan lausekkeen suurin mahdollinen arvo, jos kunkin symbolin $\clubsuit$, $\diamondsuit$ ja $\spadesuit$ voi vapaasti valita joko yhteen-, vähennys-, kerto- tai jakolaskuksi?

$$\frac{8\diamondsuit 1}{6\clubsuit 2}\spadesuit 2$$

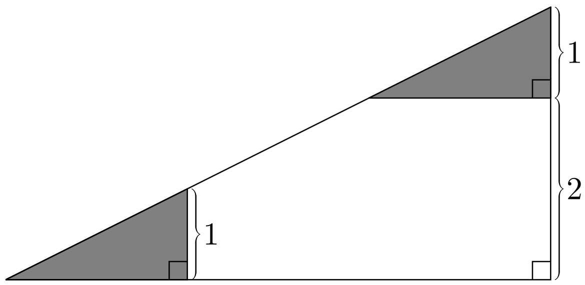
a) $\frac{9}{2}$ **b)** 6 **c)** 5 **d)** $\frac{15}{4}$ **e)** $\frac{11}{3}$

Ratkaisu. b) 6. Jos luvusta $\frac{8\diamondsuit 1}{6\clubsuit 2}$ halutaan suurin mahdollinen, niin luvun $8\diamondsuit 1$ pitää olla mahdollisimman suuri ja luvun $6\clubsuit 2$ pitää olla mahdollisimman pieni. Kokeilemalla huomataan, että tätä varten $\diamondsuit$ pitää valita yhteenlaskuksi ja $\clubsuit$ jakolaskuksi, jolloin

$$\frac{8\diamondsuit 1}{6\clubsuit 2}=\frac{8+1}{\frac{6}{2}}=\frac{9}{3}=3.$$

Jotta luku $\frac{8\diamondsuit 1}{6\clubsuit 2}\spadesuit 2=3\spadesuit 2$ saadaan tämän jälkeen mahdollisimman suureksi, niin kokeilemalla huomataan, että $\spadesuit$ kannattaa valita kertolaskuksi. Tällöin $3\spadesuit 2=3\cdot 2=6$ on lausekkeen suurin mahdollinen arvo.

9. Kuvassa olevien harmaiden alueiden yhteenlaskettu pinta-ala on 2. Mikä on valkoisen alueen pinta-ala?



a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Ratkaisu. **d)** 7. Koska harmaiden kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on 2 ja kolmiot ovat yhtenevät, on yhden harmaan kolmion pinta-ala 1. Näin ollen harmaan kolmion kannan pituus on 2. Koska harmaat kolmiot ovat yhdenmuotoisia kuvan suurimman kolmion kanssa ja suurimman kolmion korkeus on 3 kertaa harmaan kolmion korkeus, on myös sen kannan pituus 3 kertaa harmaan kolmion kannan pituus eli 6. Siispä suurimman kolmion pinta-ala on $\frac{3\cdot 6}{2} = 9$, ja valkoisen alueen pinta-alaksi saadaan $9 - 2 = 7$.

10. Matilla on pyykkikorissa sekaisin 15 sukkaa, yhdeksät housut ja neljä paitaa. Matti nostaa korista vaatteita satunnaisesti yhden kerrallaan, laittamatta niitä takaisin. Kuinka monta vaatetta Matin täytyy nostaa saadakseen varmasti ainakin kaksi sukkaa, ainakin yhdet housut ja ainakin yhden paidan?

a) 24 **b)** 25 **c)** 26 **d)** 27 **e)** 28

Ratkaisu. **b)** 25. Koska paitoja on korissa vähiten, Matti joutuu nostamaan eniten vaatteita silloin, kun hän nostaa korista kaikki sukat ja kaikki housut ennen yhtäkään paitaa. Koska sukkia ja housuja on yhteensä 24, niin nostaessaan 25 vaatetta Matti saa varmasti ainakin kahdet sukat, yhdet housut ja paidan.

11. Veetin luokitus eräässä kilpailullisessa videopelissä ilmaistaan kokonaislukuna. Tiedetään, että Veetin luokitus kasvaa koulupäivänä 80 yksikköä ja vapaapäivänä joko 100 tai 200 yksikköä. Jos Veetin luokitus on aluksi 0 ja viikon kuluttua 740, kuinka monta vapaapäivää Veetillä oli viikon aikana?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Ratkaisu. **c)** 4. Koska vapaapäivänä Veetin luokituksen kaksi viimeista numeroa eivät muutu, niin koulupäivien lukumäärä kerrottuna luvulla 80 täytyy antaa luku, jonka viimeiset numerot ovat 4 ja 0. Koska $2 \cdot 80 = 160$, $3 \cdot 80 = 240$, $4 \cdot 80 = 320$, $5 \cdot 80 = 400$, $6 \cdot 480$ ja $7 \cdot 80 = 560$, nin koulupäiviä on täytynyt olla 3. Näin ollen vapaapäiviä oli $7 - 3 = 4$.

12. Summataan yhteen kaikki ne kokonaisluvut, jotka saadaan järjestämällä luvun

$$2023$$

numerot uudelleen siten, että nolla ei ole ensimmäisenä. Mikä on näin saadun kokonaisluvun viimeinen numero?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Ratkaisu. **d)** 4. Uudelleenjärjestämällä saatavia lukuja, joiden viimeinen numero on 3, on 2 kappaletta: 2023 ja 2203. Sellaisia lukuja, joiden viimeinen numero on 2, on $2 \cdot 2 = 4$: Luvulle 0 on kaksi paikkaa, ja jäljellä oleville luvuille 2 ja 3 on kaksi mahdollista järjestystä. Sellaisten lukujen summaaminen, joiden viimeinen numero on 0, ei muuta summan viimeistä numeroa. Koska lukujen summan viimeinen numero on sama kuin lukujen viimeisten numeroiden summan viimeinen numero, ja $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 6 + 8 = 14$, on kysytyn summan viimeinen numero 4.

13. Leenu, Liinu ja Tiinu ovat valinneet kukin yhden kokonaisluvun. Heidän valitsemansa luvut ovat erisuuria, ja jokainen kertoo jotain valitsemastaan luvusta. Yksi heistä kuitenkin valehtelee.

Tiinu sanoo, että hänen lukunsa on kaikista pienin. Liinu puolestaan sanoo, että hänen valitsemansa luku on Leenun lukua suurempi eikä ole kaikista suurin. Leenu väittää, että hänen valitsemansa luku on kaikista suurin.

Aseta Leenun, Liinun ja Tiinun valitsemat luvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan.

a) Leenun, Liinun ja Tiinun luku **b)** Leenun, Tiinun ja Liinun luku **c)** Liinun, Leenun ja Tiinun luku **d)** Liinun, Tiinun ja Leenun luku **e)** Tiinun, Liinun ja Leenun luku

Ratkaisu. **e)** Tiinun, Liinun ja Leenun luku. Liinu valehtelee. Nimittäin, jos Tiinu valehtelisi, niin Liinu ja Leenu puhuisivat totta, mutta heidän väitteensä ovat ristiriidassa keskenään. Toisaalta, jos Leenu valehtelisi ja Tiinu ja Liinu puhuisivat totta, niin kenenkään luku ei olisi kaikista suurin, mikä on mahdotonta. Näin ollen Tiinu puhuu totta väittäessään oman lukunsa olevan kaikista pienin, Leenu puhuu totta väittäessään oman lukunsa olevan kaikista suurin, ja Liinun luvun täytyy jäädä keskimmäiseksi.

14. Eräällä metsäalueella kasvaa 800 yhtä korkeaa puuta. Joka vuosi samaan aikaan metsää harvennetaan, jolloin niistä puista, joiden korkeus on ainakin 3 metriä, kaadetaan puolet, ja uusi 20 cm korkea puuntaimi istutetaan jokaisen kaadetun tilalle. Tiedetään, että kaikki puut ovat aluksi 5 metrin korkuisia ja puut kasvavat metrin vuodessa. Kun metsää on harvennettu viisi kertaa, kuinka monta puuta sieltä on yhteensä kaadettu?

a) 400 **b)** 650 **c)** 775 **d)** 1000 **e)** 1175

Ratkaisu. **e)** 1175. Muodostetaan seuraava taulukko. Kolmannen harvennuksen jälkeen istutettuja puita ei taulukoida, koska niitä ei ehditä kaataa.

Kaadetut puut ja metsässä olevat puut harvennuksen jälkeen			
Harvennuksessa kaadettuja puita	Alkuperäisiä puita, korkeus	1. harvennuksessa istutettuja puita, korkeus	2. harvennuksessa istutettuja puita, korkeus
1. 400	400, 500cm	400, 20cm	-
2. 200	200, 600cm	400, 120cm	200, 20cm
3. 100	100, 700cm	400, 220cm	200, 120cm
4. 50 + 200	50, 800cm	200, 320cm	200, 220cm
5. 25 + 100 + 100	25, 900cm	100, 420cm	100, 320cm

Laskemalla vasemman sarakkeen luvut yhteen saadaan $400+200+100+250+225 = 700+475 = 1175$.

15. Tutkitaan säännöllistä kahdeksankulmiota, jonka pinta-ala on A. Yhdistämällä sen kaksi kulmaa janalla saadaan kolmio, jonka pisimmän sivun pituus on 1. Mikä on tämän kolmion pinta-ala?

a) 1 **b)** $\frac{A-1}{4}$ **c)** $\frac{A}{8}$ **d)** $\frac{A-1}{8}$ **e)** $\frac{A+1}{8}$

Ratkaisu. **b)** $\frac{A-1}{4}$. Huomataan, että kahdeksankulmion sisälle neljä yhtenevää kolmiota piirtämällä muodostuu neliö, jonka sivun pituus on 1. Näin ollen neljän kolmion yhteenlaskettu ala on $A - 1$ ja yhden kolmion ala $\frac{A-1}{4}$.