Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 13.4.2024

Kirjoita ratkaisuihisi runsaasti välivaiheita ja sanallisia perusteluja!

1. Tiedetään, että x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, joista x on pariton ja y on parillinen, ja jotka toteuttavat yhtälön

$$(x+2)y = 24.$$

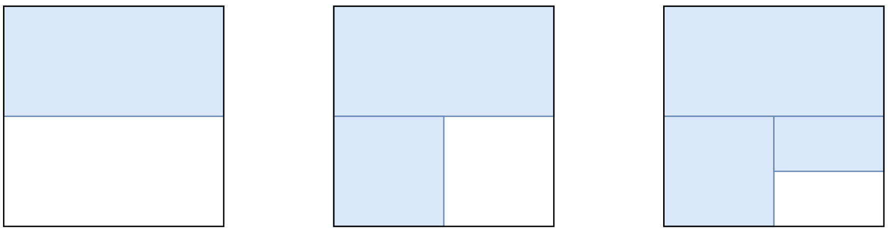
Selvitä luvut x ja y. Onko vastauksia useita? Miksi / miksi ei?

Ratkaisu. Luku 24 täytyy esittää kahden luvun, lukujen $x+2$ ja y tulona, joten listataan luvun 24 kaikki tekijät: ne ovat $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ ja 24. Koska x on pariton, niin myös luku $x+2$ on pariton. Luvulle $x+2$ on siis kaksi vaihtoehtoa: joko $x+2=3$ tai $x+2=1$.

- Jos $x+2=3$, niin $x=3-2=1$. Tällöin $y=8$.
- Jos $x+2=1$, niin $x=1-2=-1$. Tehtävänannossa kuitenkin sanotaan, että luvun x pitää olla positiivinen, joten tämä vaihtoehto ei käy.

Ratkaisuja on siis vain yksi: $x=1$ ja $y=8$.

2. Tarkastellaan neliötä, jonka pinta-ala on 1. Väritetään alueesta ensin puolet. Toisessa vaiheessa väritetään jäljelle jääneestä alueesta taas puolet. Jatketaan samaan tapaan. Kuinka iso pinta-ala on väritetty yhteensä 8 vaiheen jälkeen? Anna vastaus murtolukuna.



Vaihe 1 Vaihe 2 Vaihe 3

Ratkaisu. Koska koko pinta-ala on 1 ja uusi väritettävä alue on aina puolet edellisestä, niin yhteensä 8 vaiheen on väritetty pinta-ala

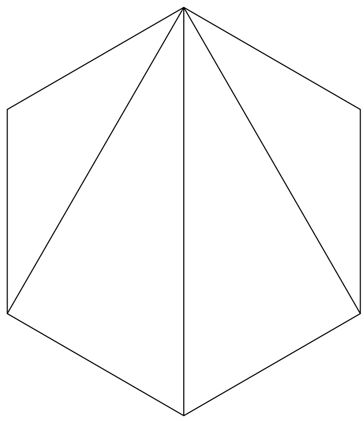
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=\frac{255}{256}.$$

Ratkaisu saadaan helpommalla laskulla, kun huomataan, että viimeisen vaiheen jälkeen jäljellä olevan valkoisen alueen pinta-ala on $\frac{1}{256}$. Väritetyn alueen pinta-ala on alkuperäinen pinta-ala 1 miinus valkoinen alue, eli

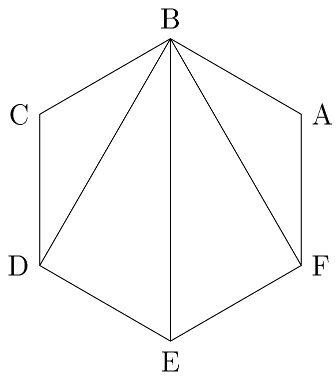
$$1-\frac{1}{256}=\frac{256}{256}-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}.$$

3. Kuvassa on säännöllinen kuusikulmio, eli kuusikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria. Kuusikulmion yhdestä kärjestä on myös piirretty janat jokaiseen muuhun kärkeen.

Kuviossa näkyy nyt neljä kolmiota. Selvitä päättelemällä kunkin kolmion kaikki kulmat. Voit hyödyntää sitä tietoa, että kolmion kulmien summa on aina $180°$. Perustele huolellisesti päättelysi vaiheet. Älä käytä kolmioviivainta äläkä arvioi kulmia silmämääräisesti.



Ratkaisu. Nimetään kulmat ja aloitetaan selvittämällä kulma $\angle A$.



Koska kuusikulmio muodostuu neljästä kolmiosta ja kolmion kulmien summa on $180°$, niin kuusikulmion kulmien summa on $4 \cdot 180° = 720°$. Tällöin yhden kuusikulmion kulman suuruus on kuudesosa tästä, eli $720°/6 = 120°$. Siis $\angle A = 120°$. Kuvio on pystysuoran janan BE suhteen symmetrinen, joten myös $\angle C = 120°$.

Kolmio ABF on tasakylkinen, joten sen kantakulmat ovat yhtäsuuret. Saadaan $\angle ABF + \angle AFB + 120° = 180°$, josta $\angle ABF = \angle AFB = 30°$. Vastaavasti $\angle CBD = \angle CDB = 30°$.

Kärjestä F saadaan $\angle BFE + 30° = 120°$, joten $\angle BFE = 90°$, ja vastaavasti $\angle BDE = 90°$. Jana BE jakaa kulman kärjessä E puoliksi, joten $\angle BED = \angle BEF = 120°/2 = 60°$.

Lopuksi vielä kärki B. Siellä $30° + \angle DBE + \angle FBE + 30° = 120°$. Jana BE jakaa sielläkin kulman puoliksi, joten $\angle DBE = \angle FBE = (120° - 30° - 30°)/2 = 30°$.

4. Kun koulun juhlasalin tuolit asetellaan seitsemään yhtä pitkään riviin, jää 3 tuolia yli. Jos tuolit asetetaan 9 yhtä pitkään riviin, jää viimeinen rivi 3 tuolia vajaaksi. Tuoleja on enemmän kuin 50 mutta alle 100. Montako tuolia salissa on? Voiko tuolit asettaa jotenkin niin, että jokaiseen riviin tulisi yhtä monta tuolia eikä tuoleja jäisi yli?

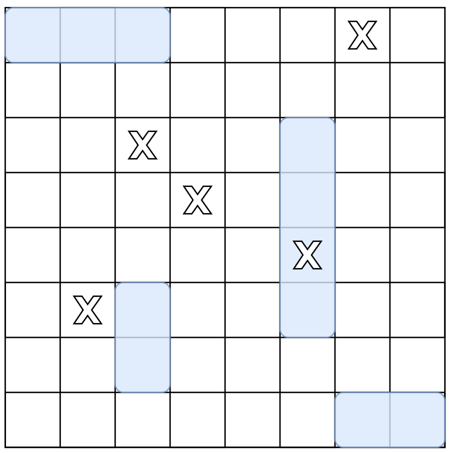
Ratkaisu. Listataan taulukkoon 7:n mahdolliset monikerrat ja lisätään näihin lukuihin 3. Listataan sitten 9:n mahdolliset monikerrat ja vähennetään näistä luvuista 3.

$7 \cdot k$	42	49	56	63	70	77	84	91	98
$7 \cdot k + 3$	~~45~~	52	59	66	73	80	$\boxed{87}$	94	~~101~~
$9 \cdot m$	45	54	63	72	81	90	99	108	
$9 \cdot m - 3$	~~42~~	51	60	69	78	$\boxed{87}$	93	~~105~~	

Ainoa tuolien lukumäärä, joka on sekä muotoa $7 \cdot k + 3$ että muotoa $9 \cdot m - 3$ on 87.

Jotta tuolit voitaisiin asetella yhtä pitkiksi riveiksi, täytyy tuolien määrän olla jaollinen rivien lukumäärällä. Luku 87 on jaollinen luvuilla 1, 3, 29 ja 87. Tuolit voidaan asettaa 3 riviin, joista kussakin on 29 tuolia tai 29 riviin, joissa on kussakin 3 tuolia. Tuolit voidaan asettaa myös 87 “riviin”, joissa on jokaisessa 1 tuoli, tai yhteen riviin, jossa on kaikki 87 tuolia.

5. Laivanupotus on kaksinpeli, jota pelataan neliön muotoisella ruudukolla. Yksi pelaajista valitsee salaa, missä kohdissa ruudukkoa laivat ovat piilossa. Toinen pelaaja yrittää upottaa laivoja arvaamalla ruutuja. Laivojen piilottaja paljastaa kunkin arvauksen jälkeen, tuliko laivaan osuma (arvaus osui ruutuun, jossa on laivan osa) vai huti.



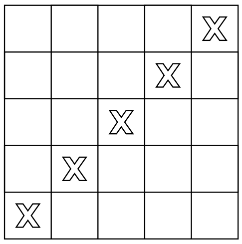
Kuva 1: Tavallisesti laivanupotuksessa ruudukossa on piilotettuna useita erikokoisia laivoja. Kuvassa siniset suorakulmiot kuvaavat laivoja ja rastit toisen pelaajan tekemiä arvauksia. 4 ruudun pituinen laiva on saanut osuman.

Vastustajasi on piilottanut kentälle vain yhden 5 ruudun pituisen laivan. Laiva voi sijaita missä päin tahansa ruudukkoa joko vaakasuorassa tai pystysuorassa, mutta ei vinossa. Loput ruudukosta on tyhjää. Tutkitaan tilannetta kahdella erikokoisella laudalla:

a) Pelilauta eli ruudukko on 5×5 ruudun kokoinen.

b) Pelilauta eli ruudukko on 10×10 ruudun kokoinen.

Keksi arvausstrategia, jolla varmasti osut piilotettuun laivaan mahdollisimman pienellä määrällä arvauksia. Yksi osuma laivaan riittää. Selitä strategiasi sanallisesti tai piirroksen avulla. Perustele, miksi tämä on paras strategia.

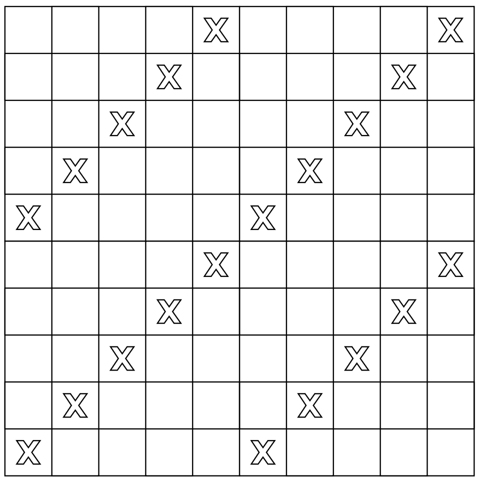


Ratkaisu.

a) Viiden ruudun mittaisen laivan sijainnille 5×5 ruudukossa on 10 vaihtoehtoa: viisi vaakariviä ja viisi pystyriviä. Nämä vaihtoehdot voidaan testata kaikki viidellä arvauksella, esimerkiksi alla olevan kuvan mukaisesti (toimivia vaihtoehtoja on useita):

Pienempi määrä arvauksia ei riitä. Neljällä arvauksella jäisi aina vähintään yksi kokonainen vaakarivi (ja yksi kokonainen pystyrivi) tarkistamatta, joten laivaan ei välttämättä osuta.

b) Alla olevan piirroksen mukaan koko 10×10 ruudukko on mahdollista tutkia 20 arvauksella (toimivia vaihtoehtoja on useita):



Voisiko pienempi määrä arvauksia riittää? Koska jokaisella vaakarivillä on 10 ruutua, niin rasteja täytyy asettaa jokaiselle riville vähintään 2 kpl. Jos jollain rivillä nimittäin olisi vain yksi rasti, niin jommalle kummalle puolelle rastia jäisi viiden mittainen vaakasuuntainen pätkä tutkimatta. Sama pätee pystyriveille. Pienin mahdollinen määrä arvauksia on siis vähintään $2 \cdot 10 = 20$. Olemme siis löytäneet parhaan mahdollisen strategian.